অঙ্ক নমুনা প্রশ্নপত্র -- ৩

শিক্ষক ঃ-- মলয় কুমার ঘোষ
বালিগঞ্জ গর্ভনমেন্ট হাই স্কুল

বিভাগ - ক **1.** নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও (বিকল্প প্রশ্নগুলি লক্ষণীয়) ঃ

(a) শূন্যস্থান পূরণ করো ঃ

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ হলে A–2I এর মান হবে -----.

Ans. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\therefore A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) সঠিক উত্তরটি লেখ ঃ

$1 + \log_e^3 + \frac{(\log_e^3)^2}{2} + \frac{(\log_e^3)^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ শ্রেণির যোগফল হবে --

(i) $\log_e^3$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) 3 (iv) e^3

Ans. $1 + \log_e^3 + \frac{(\log_e^3)^2}{2} + \frac{(\log_e^3)^3}{3} + \ldots\ldots\ldots$

$= e^{\log_e^3} = 3.$

Ans. (iii).

(c) $9x^2 + 5y^2 = 30y$ উপবৃত্তের পরাক্ষের দৈর্ঘ্য হল ---

(i) 6 (ii) $2\sqrt{5}$ (iii) $\sqrt{6}$ (iv) $\sqrt{5}$

Ans. $9x^2 + 5y^2 = 30y$

or, $9x^2 + 5(y^2 - 6y + 9) = 45$

or, $9x^2 + 5(y - 3)^2 = 45$

or, $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} + \dfrac{(y-3)^2}{(3)^2} = 1$

$\therefore$ Length of major axis = 2 x 3 = 6 units.

Ans. (a)

অথবা, $x = ay^2 + by + c$ পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য হল --

(i) $\dfrac{a}{4}$ (ii) $\dfrac{b}{3}$ (iii) $\dfrac{1}{a}$ (iv) $\dfrac{1}{4a}$

Ans. $x = ay^2 + by + c$

$\therefore \quad y^2 + \dfrac{b}{a}y + \dfrac{c}{a} = \dfrac{x}{a}$

$\Rightarrow (y + \beta)^2 = \dfrac{1}{a}(x-\alpha)$ form. $\therefore$ Length of Latus rectum = $\dfrac{1}{a}$ units

Ans. (iii).

(d) নীচের উত্তরটি সত্য না মিথ্যা উল্লেখ করো ঃ

$y = \sin^{-1}(3x - 4x^3) + \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$ হলে $\dfrac{dy}{dx} = 0$ হবে।

Ans. $y = \sin^{-1}(3x - 4x^3) + \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

$\therefore y = 3\sin^{-1}x + 3\cos^{-1}x = 3\pi/2$

or, $\dfrac{dy}{dx} = 0.$

$\therefore$ Statement is true.

অথবা, $y = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান হবে --

(i) $\dfrac{2}{1+x^2}$ (ii) $\dfrac{2x}{1+x^2}$ (iii) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (iv) $-\dfrac{x}{1+x^2}$

Ans. $y = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x \quad \therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{1+x^2}$ Ans. (i).

(e) শূন্যস্থান পূরণ করো ঃ

$y = \cos^2 x - \sin^2 x$ হলে $\left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=0} = \ldots\ldots\ldots$

Ans. $y = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$\therefore \frac{dy}{ds} = 2\sin 2x \quad \text{or,} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -4\cos 2x \quad \therefore \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = -4.$$

(f) $\int \frac{\sin(\log x)}{x}dx$ এর মান নীচের কোনটি ?

(i) $-\cos \log|x| + c$ (ii) $\cos \log|x| + c$ (iii) $\sin \log|x| + c$ (iv) $-\sin \log|x| + c$

Ans. $\int \frac{\sin(\log x)}{x}dx = \int \sin z\, dz$ [Where $\log x = z \therefore \frac{1}{x}dx = dz$]

$= -\cos z + c - \cos(\log(x)) + c$

Ans. (i)

অথবা, শূন্যস্থান পূরণ কর ঃ $\int e^x \sin(e^x)dx$ এর মান হবে ------

Ans. $\int e^x \sin(e^x)dx = \int \sin z\, dz$ [$e^x = z \therefore e^x\, dx = dz$]

$= -\cos(z) + c = -\cos(e^x) + c.$

(g) নিচের উত্তরটি সত্য না মিথ্যা উল্লেখ করো ঃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log(\tan x)dx = \pi$

Ans. $I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \log(\tan x)\, dx$

$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \sin 2(\pi/2 - x) \log(\tan(\pi/2 - x))\, dx$

$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \cot x\, dx$

$\therefore 2I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x [\log \tan x \cot x]dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \times 0 = 0$

$\therefore$ Answer is not true.

অথবা, নীচের উত্তরটি সত্য না মিথ্যা উল্লেখ করো ঃ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3 \sin^4 x dx = 0$

Ans. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^3 \sin^4 x\, dx$

Let $f(x) = x^3 \sin^4 x \quad \therefore f(-x) = -x^3 \sin^4 x$

$\therefore$ f(x) is odd function $\therefore \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = 0.$

(h) শূন্যস্থান পূরণ করো ঃ $\int_0^{100\pi} \sqrt{1+\cos 2x dx}$ এর মান হবে ---------

Ans. $\int_0^{100\pi} \sqrt{1+\cos 2x\, dx} = \int_0^{100\pi} \sqrt{2}(\cos x)dx$

$= 100\sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos x\, dx = 100\sqrt{2}\, [\sin x]_0^{\pi} = 0.$

(i) শূন্যস্থান পূরণ করো ঃ

একটি গতিশীল কণা সরলরেখা বরাবর t সেকেন্ডে $(5t^2 - 2t)$ সেমি দূরত্ব যায়। t = 3 সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ হবে -----

Ans. $S = 5t^2 - 2t$

or, $\frac{ds}{dt} = 10t - 2. \quad \therefore \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = 10 \times 3 - 2 = 28$ cm/sec.

$\therefore$ Velocity after 3 sec is 28 cm/sec.

(j) শূন্যস্থান পূরণ করো ঃ y = (1 – x) (2 + 3x) এর চরম মান হবে -----------।

Ans. $y = (1 - x)(2 + 3x)$

$= 2 + 3x - 2x - 3x^2$

$= 2 + x - 3x^2$

$\frac{dy}{dx} = 1 - 6x = 0$ [for maximum]

$\therefore x = 1/6.$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -6 < 0 \quad \therefore$ y has max. value

$y_{max} = \left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{12}.$

বিভাগ - খ **2. নির্দেশ অনুযায়ী নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ** 2 x 2 = 4

(a) যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(i) একটি তাসের প্যাকেটে অবিন্যস্তভাবে ভরা 52 টি বিভিন্ন তাস থেকে যথেচ্ছভাবে একটি তাস টানা হল। তাসটি ইসকাবন (Spades) বা সাহেব হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

Ans. A be the event of getting king

B be the event of getting spades.

$\therefore x(A) = 13,\ x(B) = 4.$

Now, $x(S) = 52.$ $\quad n(A \cap B) = 1$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

(ii) $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...\alpha(-1 < x \le 1)$ হলে দেখাও যে,

$x = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ...\alpha$

Ans. $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...\infty$

or, $y = \log_e(1+x) \Rightarrow 1 + x = e^y$

or, $x = e^y - 1 = \left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ...\infty\right) - 1$

$$= y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ...\infty$$

(iii) $A - 2B = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ এবং $A - 3B = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 4 & -13 \end{pmatrix}$ হলে A ও B ম্যাট্রিক্স দুটি নির্ণয় করো।

Ans: $A - 2B = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$; $A - 3B = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 4 & -13 \end{pmatrix}$

$\therefore (A - 2B) - (A - 3B) = \begin{pmatrix} -18 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore B = \begin{pmatrix} -18 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Putting B in 1st case you get A. (Do yourself)

(b) যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2 x 1 = 2

(i) $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 119 = 0$ পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

Ans. $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 119 = 0$

or, $9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 - 2y + 1) - 9 + 16 - 119 = 0$

or, $9(x + 1)^2 - 16(y - 1)^2 = 112$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{112}{9}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{112}{16}} = 1$$

$\therefore$ Length of Latus rectum $= 2\dfrac{b^2}{a}$

$$= 2.\frac{112/16}{\sqrt{\frac{112}{9}}} \text{ units}$$

$$= \frac{\sqrt{112} \text{ x } 3}{8} \text{ units}$$

(ii) $y^2 - 6y - 8x + 25 = 0$ অধিবৃত্তের নাভিস্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

Ans. $y^2 - 6y - 8x + 25 = 0$

or, $y^2 - 6y + 9 = 8x - 25 + 9$

or, $(y - 3)^2 = 8x - 16$

or, $(y - 3)^2 = 8(x - 4)$ $\therefore$ $a = 2$

Focus $(\alpha + a, \beta) = (4 + 2, 3) = (6, 3)$

(c) যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2 x 1 = 2

(i) $x^p, y^q = (x+y)^{p+q}$ হলে দেখাও যে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

Ans. $x^p. y^q = (x + y)^{p+q}$

$\Rightarrow$ p log x + q log y = (p + q) log (x + y)

= Differential with respect to x,

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

or, $\left(\frac{q}{y}-\frac{p+q}{x+y}\right)\frac{dy}{dx}=\left(\frac{p+q}{x+y}-\frac{p}{x}\right)$

or, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ [$x + y \neq 0$]

(ii) $y = x^2 . \log x$ হলে $x = 1$ বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান নির্ণয় করো।

Ans. $y = x^2 \log x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{x}+2x\log x = x + 2x \log x = x(1 + 2 \log x)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=x\left(\frac{2}{x}\right)+(1+2\log x)$

$\therefore \left.\frac{dy^2}{dx^2}\right|_{x=1} = 2 + 1 + 2 \log 1 = 3.$

Ans. 3.

(d) যে কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2 x 1 = 2

(i) $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x-3}}$ এর মান নির্ণয় করো।

Ans. $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x-3}}$ $\quad x - 3 = z^2 \therefore x - 2 = z^2 + 1$

$dx = 2zdz$

$=\int\frac{2zdz}{(z^2+1)\sqrt{z^2}} = 2\int\frac{dz}{z^2+1^2}=2\tan^{-1}z+c$

$=2\tan^{-1}\sqrt{x-3}+c$

(ii) $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}.e^{x+\frac{1}{x}}.dx$ এর মান নির্ণয় করো।

Ans. $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}e^{x+\frac{1}{n}}dx$ $\quad x+\frac{1}{x}=z$

$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dz$

$$= \int_2^{5/2} e^z dz \qquad \therefore \frac{x^2-1}{x^2}dx = dz$$

$$= \left[e^z\right]_2^{5/2} = e^{5/2} - e^2$$

x	1	2
z	2	5/2

(e) যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2 x 1 = 2

(i) a ও b ধ্রুবকদ্বয়কে অপনয়ন করে y = alogx + b থেকে অবকল সমীকরণ গঠন করো।

Ans. y = a log x + b

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} \quad \text{or,} \quad x\frac{dy}{dx} = a$$

$$\text{or, } x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \text{ which is the differential equation}$$

(ii) সমাধান করো ঃ ydx – xdy = xy dx.

Ans. ydx – xdy = xydx

$$\text{or, } \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{xy}{y^2}dx$$

$$\text{or, } \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)} = dx \qquad \therefore \int \frac{d(x/y)}{(x/y)} = x + c$$

$$\text{or, } \ln\left|\frac{x}{y}\right| = x + c.$$

(f) যে কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2 x 3 = 6

(i) x- এর কোন্ মানের জন্য $f(x) = e^x$ এবং g(x) = 2x + 2 অপেক্ষকদ্বয়ের x -এর সাপেক্ষে পরিবর্তনের হার সমান ?

Ans. $f(x) = e^x$, y(x) = 2x + 2

$f'(x) = e^x$, $g'(x) = 2$

$\therefore e^x = 2 \quad \Rightarrow x = \log_e^2$.

(ii) x-এর সকল ধনাত্মকমানের জন্য $f(x) = (x-1)e^x + 1$ অপেক্ষক ধনাত্মক।

Ans. $f(x) = (x-1)\, e^x + 1$

$f'(x) = (x-1)\, e^n + e^x = xe^x > 0$ for $x > 0$.

$\therefore f(x) > f(0)$ Now, $f(0) = 0$.

$\therefore f(x) > 0$. (Proved)

(iii) $y = 2x^2 - 6x - 4$ বক্রের কোন বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল ?

Ans. $y = 2x^2 - 6x - 4$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 6$$

Since tangent at (x, y) is parallel to x–axis

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

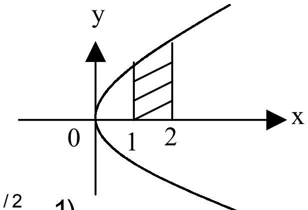
$$\therefore y = 2(\frac{3}{2})^2 - 6(\frac{3}{2}) - 4 = 2 \times \frac{9}{4} - 9 - 4$$

$$= \frac{9}{2} - 13 = -\frac{17}{2}$$

$$\therefore \text{ Req. point } \left(\frac{3}{2}, \frac{-17}{2}\right).$$

(iv) $y^2 = 4x$ অধিবৃত্ত, $x = 1$ ও $x = 2$ সরলরেখাদ্বয় ও x –অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

Ans. $y^2 = 4x,\ x = 1,\ x = 2$



$$\therefore \text{Req. Area} = \int_1^2 \sqrt{4x}\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = 2 \times \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 1\right] = \frac{4}{3}(2^{3/2} - 1)$$

$$= \frac{4}{3}\left(2^{3/2} - 1\right).$$

(v) একটি কণা সরলরেখা বরাবর গতিশীল। কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $x = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$. দূরত্বের মাধ্যমে t সময়ে কণাটির ত্বরণ নির্ণয় করো।

Ans. $x = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$

$$\frac{dx}{dt} = -6 \sin 2t + 8 \cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -12\cos 2t - 16\sin 2t$$

$$= -4\,(3\cos 2t + 4\sin 2t) = -4x.$$

$\therefore$ Acc^n = $-4x$

বিভাগ - গ **3. নির্দেশ অনুযায়ী নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ**

(a) যে কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4 x 2 = 8

(i) ক্রেমারের পদ্ধতিতে সমাধান করো ঃ

$3x + y + z = 10,\ x + y - z = 0,\ 5x - 9y = 1.$

Ans. $3x + y + z = 10$

$x + y - z = 10$

$5x - 9y = 1$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -9 & 0 \end{vmatrix} = -36 - 10 = -46 \neq 0.$$

$$\therefore \frac{x}{\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -9 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-46}$$

Solving you get x, y, z (Do yourself)

(ii) চার জন ব্যক্তির জন্মদিন বৎসরে বিভিন্ন তারিখে হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(365 দিনে বৎসর ধরে নিতে পারো)।

Ans. $$P(A) = \frac{{}^{365}C_1 \times {}^{364}C_1 \times {}^{363}C_1 \times {}^{362}C_1}{{}^{365}C_4}$$

(iii) n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ($n \geq 1$) হলে গাণিতিক আরোহণ পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করো যে,

$4^n - 3n - 1$ রাশিটি সর্বদা 9 দ্বারা বিভাজ্য।

Ans. $P(n) : 4^n - 3n - 1 = 2^{2n} - 3n - 1$

$P(1) = 4 - 3 - 1 = 0$

$P(2) = 4^2 - 3 \times 2 - 1 = 16 - 6 - 1 = 9$

$\therefore$ P(1), P(2) is true.

Let, $P(m) = 4^m - 3m - 1$

$P(m+1) = 4^{m+1} - 3(m+1) - 1 = 4.4^m - 3m - 4$

$= 4.4^m - 12m - 4 + 9m = 4(4^m - 3m - 1) + 9m$

$\therefore$ P(m+1) is divisible by 9.

(b) যে কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4 x 2 = 8

(i) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $\left(at_1^2, 2at_1\right)$ ও $\left(at_2^2, 2at_2\right)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় করো। ঐ জ্যা নাভিগামী হলে দেখাও যে, $t_1 . t_2 = -1$

Ans. Equation of the Chorel is

$$\frac{y - 2at_1}{2at_1 - 2at_2} = \frac{x - at_1^2}{at_1^2 - at_2^2}$$

If it passes through (a, 0) then

$$\frac{0 - 2at_1}{t_1 - t_2} = \frac{a - at_1^2}{at_1^2 - at_2^2}$$

or, $\dfrac{-2t_1}{1} = \dfrac{1 - t_1^2}{t_1 + t_2}$ $(t_1 \neq t_2)$.

$\Rightarrow t_1 t_2 = -1.$

(ii) যে উপবৃত্তের শীর্ষদ্বয় (–1, 2) ও (9, 2) এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{4}{5}$ তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

Ans. Vertices are (–1, 2) & (9, 2)

ie., y–coordinates are equal

$$\therefore \text{ Centre } \left(\frac{-1+9}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (4, 2)$$

Major axis is parallel to x–axis.

$$\therefore \text{ Eqn. } \frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$$

$2a = \sqrt{(9+1)^2 + b^2} = 10$. $\therefore a = 5$

$b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow b^2 = 5\left(1 - \frac{16}{25}\right) = 5 \times \frac{9}{25}$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$$\therefore \text{ Req. equation } \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9/5} = 1.$$

(iii) $16x^2 - 9y^2 = 144$ পরাবৃত্তের নাভিদ্বয়, উৎকেন্দ্রতা ও নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

Ans. $16x^2 - 9y^2 = 144.$

$$\text{Or, } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$a^2 = 9, \quad b^2 = 16. \quad \therefore e = \sqrt{1+\frac{16}{9}} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Focii} = (\pm\, ae, 0) = \left(\pm 3 \times \frac{5}{3}, 0\right) = (\pm 5, 0).$$

Equation of directions : $x = \pm\, a/e$

$$x = \pm \frac{3}{5/3} = \pm \frac{9}{5}$$

or, $5x \pm 9 = 0.$

(c) যে কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4 x 2 = 8

(i) প্রমাণ করো ঃ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\sqrt{2}+1\right)$

Ans. $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{\sin x + \cos x}$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x} dx \qquad \left[\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$\therefore 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{cosec}(x + \frac{\pi}{4}) d(x + \frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log \left| \tan \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right| \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} + 1).$$

(d) যে কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4 x 2 = 8

(i) সমাধান করো ঃ $y - x\frac{dy}{dx} = 2\left(1 + x^2 \frac{dy}{dx}\right)$ দেওয়া আছে y = 1 যখন x = 1.

Ans. $y - x\frac{dy}{dx} = 2\left(1 + x^2 \frac{dy}{dx}\right)$

$$y - 2 = \left(x + 2x^2\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\text{or, } \frac{dx}{2x^2 + x} = \frac{dy}{y - 2}$$

$$\text{or, } \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \ln|y - 2| + c.$$

$$\text{or, } \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \ln|y - 2| + c.$$

$$\text{or, } \frac{1}{2}\frac{1}{2.\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right| = \ln|y - 2| + c$$

Putting x = 1, y = 1, we get the particular solution. (Do Yourself).

(ii) সমাধান করো ঃ $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x - 2y - 2$ দেওয়া আছে y = 1 যখন x = 1.

Ans. $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x - 2y - 2$

Or, $\frac{dy}{dx} = e^{4x}.e^{-2y}.e^{-2}$

$e^{2y}dy = e^{4x}.\ e^{-2}\ dx.$

Or, $\frac{e^{2y}}{2} = \frac{e^{4x-2}}{4} + c$

Putting x = 1, y = 1 we get the particular solution (Rest Do Yourself).

(iii) সমাধান করো ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} = x - \cos x$ দেওয়া আছে y = 1, $\frac{dy}{dx} = 0$ যখন x = 0

Ans. $\frac{d^2y}{dx^2} = x - \cos x$

Or, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \sin x + c$

Or, 0 = 0 – sin 0 + c $\quad \therefore$ c = 0.

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \sin x$

$dy = \left(\frac{x^2}{2} - \sin x\right)dx$

$y = \frac{x^3}{6} + \cos x + c$

1 = 0 + cos 0 + c $\qquad \therefore$ c = 0

$y = \frac{x^3}{6} + \cos x$

(e) যে কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4 x 4 = 16

(i) lx + my + n = 0 সরলরেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করলে দেখাও যে, $am^2 = n1$.

Ans. $y^2 = 4ax$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$

or $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)} = \frac{2a}{y_1}$

$\therefore$ Equation of the tangent at (x_1, y_1) is

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

or, $yy_1 = 2ax + 2ax_1$ ...(1)

$lx + my + n = 0$ ...(2)

Comparing (1) and (2)

$$\frac{2a}{\ell} = -\frac{y_1}{m} = \frac{2ax_1}{n}$$

$$\therefore\ x_1 = n/\ell, \qquad y_1 = -\frac{2am}{\ell}$$

$$\therefore\ y_1^2 = 4ax_1 \Rightarrow \left(\frac{-2am}{\ell}\right)^2 = 4a.\frac{n}{\ell}$$

or, $\dfrac{4a^2m^2}{\ell^2} = \dfrac{4an}{\ell}$ $\quad\therefore$ $am^2 = n\ell$. Proved.

(ii) x–অক্ষের উপরে $y^2 = 4x$ অধিবৃত্ত $x–4 – 4\cos\theta$, $y = 4\sin\theta$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

Ans. $(x - 4) = 4\cos\theta,\ \ y = 4\sin\theta$

$\Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 4^2$ ...(1)

$\therefore$ Circle of centre (4, 0) and radius = 4 units

$y^2 = 4x$ ...(2)

Solving : $(x - 4)^2 + 4x = 16$

Or, $x^2 - 8x + 16 + 4x = 16$

Or, $x(x - 4) = 0$ $\quad\therefore$ $x = 0, 4$.

$$\text{Req. area} = \int_0^4 \sqrt{16 - (x-4)^2}\,dx - \int_0^4 \sqrt{4x}\,dx$$

Calculating you get the result (Do yourself).

(iii) একটি ট্রেন হাওড়া থেকে ছেড়ে খড়গপুর গিয়ে থামে। প্রথমে তার বেগ বেড়ে সর্বোচ্চ বেগ v হয়। তারপর বেগ কমতে থাকে। হাওড়া থেকে খড়গপুর যেতে ট্রেনটির t সময় লাগলে প্রমাণ করো ঐ দুই স্টেশনের মধ্যে দূরত্ব $\frac{1}{2}$vt.

Ans. $\frac{dv}{dt} = f \Rightarrow dv = fdt$

$$\int_0^v dv = f\int_0^{t_1} dt \quad \Rightarrow v = ft_1$$

Again, $\frac{ds}{dt} = v = ft$

$$\int_0^{s_1} ds = f\int_0^t tdt \quad \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2}f\,t_1^2 = \frac{1}{2}vt_1$$

Again, Again, $0 = V - ft_2 \Rightarrow V = ft_2$

$$S_2 = Vt_2 - \frac{1}{2}\ ft_2^2 = Vt_2 - \frac{1}{2}Vt_2 = 1/2\ Vt_2$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}V(t_1 + t_2)$$

$\therefore S = \frac{1}{2}Vt$ (Proved).

(iv) একটি পাথরের টুকরোকে কোনো উচ্চতায় স্থিরাবস্থা থেকে ভূপৃষ্ঠের উপর ফেলা হল। শেষ h সেমি যেতে পাথরটির t সেকেন্ড সময় লাগলে প্রমাণ করো যে, পাথরটির ভূপৃষ্ঠে আসতে মোট $\left(\frac{t}{2} + \frac{h}{gt}\right)$ সেকেন্ড সময় লাগে।

Ans. Do yourself.

(v) $4ax + 3by = 12c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের অভিলম্ব হলে দেখাও যে, $5c = a^2e^2$

Ans. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Equation of Normal

$$y - y_1 = \frac{a^2 y|}{b^2 x|}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow (b^2x_1)y - b^2x_1y_1 = (a^2y_1)x - a^2x_1y_1$$

$$\text{or, } (a^2y_1)x - (b^2x_1)y = (a^2 - b^2)x_1y_1 \quad \ldots(1)$$

$$4ax + 3by = 12 \quad \ldots(2)$$

Comparing we get $5c = a^2e^2$.

বিভাগ - ঘ **4.** নির্দেশ অনুযায়ী নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ $6 \times 4 = 24$

(a) (i) প্রমাণ করো যে, $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^{2n}$ .... বিস্তৃতির মধ্যমপদের মান

$$\frac{1.3.5..........(2n-1)}{n!}$$ 3 + 3

Ans. $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^{2n}$ $\therefore$ t_{n+1} term is middle term.

$$t_{n+1} = {}^{2n}C_n x^n \left(\frac{1}{2x}\right)^n = {}^{2n}C_n . \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2) - 2.1}{(n!)^2} . \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\{2n(2n-2)(2n-4).....4.2\}\{(2n-1)(2n-3).....1.3\}}{n!} \times \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{2^n.n!\{1.3.5.......(2n-1)\}}{(n!)^2} . \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1.3.5.........(2n-1)}{n!} \text{ (Proved)}$$

(ii) প্রমাণ করো ঃ

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{1+2}{4^2} + \frac{1}{3}.\frac{1+2+2^2}{4^3} + \frac{1}{4}.\frac{1+2+2^2+2^3}{4^4} + ...\alpha = \log_e \frac{3}{2}$$

Ans. $t_n = \frac{1}{n} \times \frac{1+2+2^2+2^3+.....+2^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{n} \times \frac{2^n - 1}{4^n}$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)$$

$$t_1 = \frac{t}{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right), \quad t_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right), \quad t_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3}\right)$$

$$\therefore \text{Exp.} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + ...\right]$$

$$-\left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{3} + ...\right]$$

$$= -\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log\frac{1}{2}$$

$$= \log\left(\frac{3/4}{1/2}\right) = \log\frac{3}{2}.$$

(b) (i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ করো যে, $A^2 - 6A + 17I = 0$ এখান থেকে A^1 এর মান নির্ণয় করো। 3 + 3

Ans. $A^2 - 6A + 17I = 0$

Or, $A(A - 6I) = -17\,I$

Or, $A^{-1}A\,(A - 6I) = -17A^{-1}I$.

$A - 6i = -17A^{-1}$ $\qquad \therefore A^{-1} = \left(\frac{6I - A}{17}\right)$

DO YOURSELF.

(ii) প্রমাণ করো ঃ $\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \frac{8}{9!} + ... \infty = \frac{1}{e}$ 3 + 3

$$= \frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \frac{8}{9!} + ...\infty$$

$$= \frac{3-1}{3!} + \frac{5-1}{5!} + \frac{7-1}{7!} + \frac{9-1}{9!} + ...$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

(c) (i) $\log_e(xy) = e^{x+y} + 2$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় করো। 3 + 3

Ans. $\log(xy) = e^{x+y} + 2$

$$\frac{1}{xy}\left(x \times \frac{dy}{dx} + y\right) = e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\right) = e^{x+y} + e^{x+y}\frac{dy}{dx}$$

$$\left(\frac{1}{y} - e^{x+y}\right)\frac{dy}{dx} = e^{x+y} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}\ \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - e^{x+y}}$$

(ii) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = k(x-y)$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

Ans. Let, $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$

$\cos\alpha + \cos\beta = K(\sin\alpha - \sin\beta)$

$$\therefore K = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$= \cot\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$\alpha - \beta = 2\,\text{Cot}^{-1} K.$

or, $\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \cot^{-1} K$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

(d) (i) y = 2cost – cos2t, x = sin t – sin 2t হলে $t=\frac{\pi}{2}$ তে $\frac{dy^2}{dx^2}$ মান নির্ণয় করো। 3+3

Ans. y = 2cost – cos2t, x = sin t – sin 2t

$$\frac{dy}{dx}=-2\sin t+2\cos 2t, \quad \frac{dx}{dt}=\cos t - 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin t+2\cos 2t}{\cos t - 2\cos 2t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/2}=\frac{-2+2\cos\pi}{0 - 2\cos\pi}=\frac{-2-2}{+2}=-2$$

(ii) $2x=y^{\frac{1}{9}}+y^{-\frac{1}{9}}$ হলে দেখাও যে, $\left(x^2-1\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}81y$ 3+3

Ans. $2x=y^{\frac{1}{9}}+y^{-\frac{1}{9}}$

$$\left(y^{\frac{1}{9}}-y^{-\frac{1}{9}}\right)=(2x)^2-4 \;=\; 4(x^2-1)$$

$$\therefore\; y^{\frac{1}{9}}-y^{-\frac{1}{9}}=\pm 2\sqrt{n^2-1}$$

$$y^{\frac{1}{9}}+y^{-\frac{1}{9}}=2x$$

$$\therefore\; 2y^{\frac{1}{9}}=2\left((x+\sqrt{n^2-1}\right)$$

$$y=\left(x\pm\sqrt{n^2-1}\right)^9$$

$$\frac{dy}{dx}=9\left(x\pm\sqrt{n^2-1}\right)^8.\left(1\pm\frac{2x}{2\sqrt{n^2-1}}\right)$$

$$=\pm 9\frac{\left(x\pm\sqrt{n^2-1}\right)^9}{\sqrt{n^2-1}}=\frac{\pm 9y}{\sqrt{n^2-1}}$$

$$\left(\sqrt{n^2-1}\right)y_1=\pm 9y$$

or, $(x^2 - 1)\ y_1^2 = 81y^2$

or, $(x^2 - 1)\ 2y_1y_2 + 2xy_1^2 = 2 \times 81\ yy_1$

or, $(x^2 - 1)\ y_2 + xy_1 = 81y$ (Proved).

(e) (i) প্রমাণ করো ঃ $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$ 3+3

Ans. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

$$= \int \frac{dx}{5+4\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}} = \int \frac{\sec^2 x/2}{9+\tan^2 x/2}dn$$

$$= 2\int \frac{d((\tan x/2))}{(3)^2+\tan^2 x/2} = 2.\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x/2}{3}\right)+c\,.$$

(ii) মান নির্ণয় করো ঃ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ 3+3

Ans. $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ $\quad x = \cos\theta$

$dx = -\sin\theta\, d\theta$

$$= \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \times -\sin\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \tan\theta/2.2\sin\theta si\ \cos\theta/2\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\theta/2\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta)d\theta$$

$$= [\theta - \sin\theta]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

(f) (i) মান নির্ণয় করো ঃ $\int \frac{\log x}{(1+\log x)^2}dx$ 3+3

Ans. $\int \frac{\log x}{(1+\log x)^2}dx$ $\quad \log_e^x = z$

$\therefore x = e^z$

$dx = e^z dz$

$$= \int \frac{z e^z}{(1+z)^2} dz$$

$$= \int e^z \left(\frac{z+1-1}{(1+z)^2} \right) dz$$

$$= \int e^z \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+1} \right] dz$$

$$= \frac{e^z}{z+1} + c = \frac{x}{\log x + 1} + c$$

(ii) মান নির্ণয় করো ঃ $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ 3+3

Ans. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$

Let, $x - \alpha = z^2$ then integrate (Do yourself)

(g) (i) প্রমাণ করো ঃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \log\left(\sqrt{2}+1\right)$ 3+3

Ans. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{xdx}{\sin x + \cos x}$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi/2 - x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\therefore 2I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

See the Ans. Sec–3 Q(c) (iii).

(ii) মান নির্ণয় করো ঃ $\int \frac{dx}{3 + 2\sin x + \cos x}$ 3+3

Ans. $I = \int \frac{dx}{3 + 2\sin x + \cos x}$

$$= \int \frac{dx}{3 + 2\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2} + \frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x/2 \;\; dx}{3 + 3\tan^2 x/2 + 4\tan x/2 + 1 - \tan^2 x/2}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x/2\, dx}{4 + 4\tan x/2 + 2\tan^2 x/2}$$

$$= \int \frac{2dz}{2z^2 + 4z + 4} \qquad [\because \tan x/2 = z]$$

$$= \int \frac{dz}{z^2 + 2z + 1 + 1} = \int \frac{dz}{(z+1)^2 + (1)^2}$$

$$= \tan^{-1}(z+1) + c = \tan^{-1}(\tan x/2 + 1) + c$$

(h) (i) প্রমাণ করো ঃ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)d\theta = \frac{\pi}{8}\log 2$

Ans. $I = \int_0^{\pi/2} \log(1+\tan\theta)d\theta$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \log 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left\{1 + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right)d\theta$$

$$= \log 2\int_0^{\pi/4} d\theta - I$$

$$2I = \frac{\pi}{4}\log 2 \qquad \therefore \frac{\pi}{8}\log 2$$

(ii) প্রমাণ করো ঃ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16\sin 2x}dx = \frac{1}{20}\log 3$ 3+3

Ans. $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16\sin 2x}$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{25 - 16(\sin x - \cos x)^2}dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{dz}{25 - 16z^2} \qquad \sin x - \cos x = z$$

$$(\cos x + \sin x)dx = dz$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-1}^{0}\frac{dz}{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - z^2}$$

$$= \frac{1}{16}\times\frac{1}{2.\frac{5}{4}}\left[\ln\left|\frac{\frac{5}{4}+z}{\frac{5}{4}-z}\right|\right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{1}{40}x\left[\ln\left|\frac{5/4}{5/4}\right| - \ln\left|\frac{\frac{5}{4}-1}{\frac{5}{4}+1}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{40}\left[0 - \ln\frac{1}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{20}\log 3 \text{ (Proved).}$$