

**Series HMJ/C****SET-1**कोड नं. **65/C/1**
Code No.रोल नं.
Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--



परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

नोट	NOTE
(I) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 19 हैं ।	(I) Please check that this question paper contains 19 printed pages.
(II) प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।	(II) Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
(III) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 36 प्रश्न हैं ।	(III) Please check that this question paper contains 36 questions.
(IV) कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर-पुस्तिका में प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।	(IV) Please write down the Serial Number of the question in the answer-book before attempting it.
(V) इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।	(V) 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 80

Time allowed : 3 hours

Maximum Marks : 80



सामान्य निर्देश:

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख्ती से पालन कीजिए :

- (i) यह प्रश्न-पत्र चार खण्डों में विभाजित किया गया है — क, ख, ग एवं घ । इस प्रश्न-पत्र में 36 प्रश्न हैं । सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) खण्ड क में प्रश्न संख्या 1 से 20 तक 20 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।
- (iii) खण्ड ख में प्रश्न संख्या 21 से 26 तक 6 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है ।
- (iv) खण्ड ग में प्रश्न संख्या 27 से 32 तक 6 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है ।
- (v) खण्ड घ में प्रश्न संख्या 33 से 36 तक 4 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है ।
- (vi) प्रश्न-पत्र में समग्र पर कोई विकल्प नहीं है । तथापि एक-एक अंक वाले तीन प्रश्नों में, दो-दो अंकों वाले दो प्रश्नों में, चार-चार अंकों वाले दो प्रश्नों में और छः-छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं । ऐसे प्रश्नों में से केवल एक ही विकल्प का उत्तर दीजिए ।
- (vii) इसके अतिरिक्त, आवश्यकतानुसार, प्रत्येक खण्ड और प्रश्न के साथ यथोचित निर्देश दिए गए हैं ।
- (viii) कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

खण्ड क

प्रश्न संख्या 1 से 20 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं । सही विकल्प चुनिए ।

1. एक विशेष प्रश्न को A तथा B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{5}$ हैं । यदि दोनों, स्वतंत्र रूप से, प्रश्न हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रश्न के हल हो जाने की प्रायिकता है
 - (A) $\frac{7}{15}$
 - (B) $\frac{8}{15}$
 - (C) $\frac{2}{15}$
 - (D) $\frac{14}{15}$

**General Instructions :**

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

- (i) This question paper comprises **four** sections — A, B, C and D. This question paper carries **36** questions. **All** questions are compulsory.
- (ii) **Section A** – Question nos. **1 to 20** comprises of **20** questions of **1** mark each.
- (iii) **Section B** – Question nos. **21 to 26** comprises of **6** questions of **2** marks each.
- (iv) **Section C** – Question nos. **27 to 32** comprises of **6** questions of **4** marks each.
- (v) **Section D** – Question nos. **33 to 36** comprises of **4** questions of **6** marks each.
- (vi) There is no overall choice in the question paper. However, an internal choice has been provided in **3** questions of one mark, **2** questions of two marks, **2** questions of four marks and **2** questions of six marks. Only one of the choices in such questions have to be attempted.
- (vii) In addition to this, separate instructions are given with each section and question, wherever necessary.
- (viii) Use of calculators is **not** permitted.

SECTION A

Question numbers 1 to 20 carry 1 mark each.

Question numbers 1 to 10 are multiple choice questions. Select the correct option.

1. The probability of solving a specific question independently by A and B are $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{5}$ respectively. If both try to solve the question independently, the probability that the question is solved is
 - (A) $\frac{7}{15}$
 - (B) $\frac{8}{15}$
 - (C) $\frac{2}{15}$
 - (D) $\frac{14}{15}$



2. एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का उद्देश्य फलन होता है
- (A) एक अचर
 (B) एक रैखिक फलन जिसका इष्टतमीकरण करना है
 (C) एक असमिका
 (D) एक द्विघाती व्यंजक

3. यदि दो रेखाएँ

$$L_1 : x = 5, \frac{y}{3 - \alpha} = \frac{z}{-2}$$

$$L_2 : x = 2, \frac{y}{-1} = \frac{z}{2 - \alpha}$$

परस्पर लंबवत् हैं, तो α का मान है

- (A) $\frac{2}{3}$
 (B) 3
 (C) 4
 (D) $\frac{7}{3}$
4. यदि \vec{a} , \vec{b} तथा \vec{c} , क्रमशः बिंदुओं A(2, 3, -4), B(3, -4, -5) तथा C(3, 2, -3) के स्थिति सदिश हैं, तो $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ बराबर है
- (A) $\sqrt{113}$
 (B) $\sqrt{185}$
 (C) $\sqrt{203}$
 (D) $\sqrt{209}$
5. ऐसे परवलर्यों के कुल, जिनका शीर्ष मूल-बिंदु पर है और जिनका अक्ष धनात्मक x-अक्ष की दिशा में है, के अवकल समीकरण की कोटि व घात है
- (A) 1, 1
 (B) 1, 2
 (C) 2, 1
 (D) 2, 2



2. The objective function of an LPP is
- (A) a constant
 - (B) a linear function to be optimised
 - (C) an inequality
 - (D) a quadratic expression

3. If the two lines

$$L_1 : x = 5, \frac{y}{3 - \alpha} = \frac{z}{-2}$$

$$L_2 : x = 2, \frac{y}{-1} = \frac{z}{2 - \alpha}$$

are perpendicular, then the value of α is

- (A) $\frac{2}{3}$
 - (B) 3
 - (C) 4
 - (D) $\frac{7}{3}$
4. If \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} are the position vectors of the points A(2, 3, -4), B(3, -4, -5) and C(3, 2, -3) respectively, then $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ is equal to
- (A) $\sqrt{113}$
 - (B) $\sqrt{185}$
 - (C) $\sqrt{203}$
 - (D) $\sqrt{209}$
5. The order and degree of the differential equation of the family of parabolas having vertex at origin and axis along positive x-axis is
- (A) 1, 1
 - (B) 1, 2
 - (C) 2, 1
 - (D) 2, 2



6. $\int_0^1 \tan(\sin^{-1} x) dx$ बराबर है

- (A) 2
(B) 0
(C) -1
(D) 1

7. $\int \frac{e^x}{x+1} [1 + (x+1) \log(x+1)] dx$ बराबर है

- (A) $\frac{e^x}{x+1} + c$
(B) $e^x \frac{x}{x+1} + c$
(C) $e^x \log(x+1) + e^x + c$
(D) $e^x \log(x+1) + c$

8. यदि $\sec^{-1}\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = a$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है

- (A) $\frac{x-1}{y-1}$
(B) $\frac{x-1}{y+1}$
(C) $\frac{y-1}{x+1}$
(D) $\frac{y+1}{x-1}$



6. $\int_0^1 \tan(\sin^{-1} x) dx$ equals

- (A) 2
- (B) 0
- (C) -1
- (D) 1

7. $\int \frac{e^x}{x+1} [1 + (x+1) \log(x+1)] dx$ equals

- (A) $\frac{e^x}{x+1} + c$
- (B) $e^x \frac{x}{x+1} + c$
- (C) $e^x \log(x+1) + e^x + c$
- (D) $e^x \log(x+1) + c$

8. If $\sec^{-1}\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = a$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to

- (A) $\frac{x-1}{y-1}$
- (B) $\frac{x-1}{y+1}$
- (C) $\frac{y-1}{x+1}$
- (D) $\frac{y+1}{x-1}$



9. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A^2 बराबर होगा

(A) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 43 & 44 & 45 \\ 44 & 45 & 46 \\ 45 & 46 & 47 \end{vmatrix}$ बराबर है

(A) 0

(B) -1

(C) 1

(D) 2



9. If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, then A^2 equals

(A) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 43 & 44 & 45 \\ 44 & 45 & 46 \\ 45 & 46 & 47 \end{vmatrix}$ equals

(A) 0

(B) -1

(C) 1

(D) 2



प्रश्न संख्या 11 से 15 तक के प्रश्नों में खाली स्थान भरिए ।

11. एक त्रिभुज के दो कोण $\cot^{-1} 2$ और $\cot^{-1} 3$ हैं । त्रिभुज का तीसरा कोण _____ है ।

12. एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि _____ है ।

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$ हो, तो $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. यदि $y = \log x$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} - y = \log x$ का समाकलन गुणक है _____ ।

15. 52 पत्तों की एक गड्डी से, यादृच्छया 3 पत्ते (बिना प्रतिस्थापना के) निकाले गए । इन पत्तों के दो लाल रंग के पत्ते तथा एक काले रंग का पत्ता होने की प्रायिकता है _____ ।

प्रश्न संख्या 16 से 20 अति संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न हैं ।

16. x-अक्ष से बिन्दु (a, b, c) की दूरी ज्ञात कीजिए ।

17. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ हैं, तो अनुपात

$\frac{\text{सदिश } \vec{a} \text{ का सदिश } \vec{b} \text{ पर प्रक्षेप}}{\text{सदिश } \vec{b} \text{ का सदिश } \vec{a} \text{ पर प्रक्षेप}}$ ज्ञात कीजिए ।

अथवा

माना \hat{a} तथा \hat{b} दो मात्रक सदिश हैं । यदि सदिश $\vec{c} = \hat{a} + 2\hat{b}$ तथा $\vec{d} = 5\hat{a} - 4\hat{b}$ परस्पर लम्बवत् हों, तो सदिशों \hat{a} तथा \hat{b} के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

18. अवकल समीकरण $(e^x + 1) y dy = e^x (y + 1) dx$ को हल कीजिए ।



Fill in the blanks in question numbers 11 to 15.

11. Two angles of a triangle are $\cot^{-1} 2$ and $\cot^{-1} 3$. The third angle of the triangle is _____ .
12. A square matrix A is said to be singular if _____ .

OR

If $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$, then $|AB| =$ _____ .

13. If $y = \log x$, then $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____ .
14. The integrating factor of the differential equation $x \frac{dy}{dx} - y = \log x$ is _____ .
15. From a pack of 52 cards, 3 cards are drawn at random (without replacement). The probability that they are two red cards and one black card, is _____ .

Question numbers 16 to 20 are very short answer type questions.

16. Find the distance of the point (a, b, c) from the x-axis.
17. If $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$, then find the ratio
- $$\frac{\text{projection of vector } \vec{a} \text{ on vector } \vec{b}}{\text{projection of vector } \vec{b} \text{ on vector } \vec{a}} .$$

OR

Let \hat{a} and \hat{b} be two unit vectors. If the vectors $\vec{c} = \hat{a} + 2\hat{b}$ and $\vec{d} = 5\hat{a} - 4\hat{b}$ are perpendicular to each other, then find the angle between the vectors \hat{a} and \hat{b} .

18. Solve the differential equation $(e^x + 1) y dy = e^x (y + 1) dx$.



19. यदि $\begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि A एक ऐसा वर्ग आव्यूह है कि $A^2 = A$ है, तो $(2 + A)^3 - 19A$ ज्ञात कीजिए ।

20. यदि $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ हो, तो $(f \circ f)(x)$ ज्ञात कीजिए ।

खण्ड ख

प्रश्न संख्या 21 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है ।

21. माना W अंग्रेजी शब्दकोष के शब्दों का समुच्चय है । इस पर एक संबंध R निम्न रूप से परिभाषित है :

$R = \{(x, y) \in W \times W : x \text{ और } y \text{ में कम-से-कम एक अक्षर एक जैसा है}\}$

दर्शाए कि यह सम्बन्ध R स्वतुल्य व सममित है, परन्तु संक्रामक नहीं है ।

अथवा

फलन $f(x) = \left(\frac{4x}{3x+4}\right)$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए ।

22. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ के लिए, निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए :

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I$$

23. यदि $y = e^x + e^{-x}$ हो, तो दिखाइए कि $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 4}$.

24. निम्नलिखित समघात अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x \frac{dy}{dx} = x + y$$



19. If $\begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$ is a symmetric matrix, then find the value of x .

OR

If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then find $(2 + A)^3 - 19A$.

20. If $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, then find $(f \circ f)(x)$.

SECTION B

Question numbers 21 to 26 carry 2 marks each.

21. Let W denote the set of words in the English dictionary. Define the relation R by

$$R = \{(x, y) \in W \times W \text{ such that } x \text{ and } y \text{ have at least one letter in common}\}.$$

Show that this relation R is reflexive and symmetric, but not transitive.

OR

Find the inverse of the function $f(x) = \left(\frac{4x}{3x+4} \right)$.

22. For the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$, verify the following :

$$A (\text{adj } A) = (\text{adj } A) A = |A| I$$

23. If $y = e^x + e^{-x}$, then show that $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 4}$.

24. Solve the following homogeneous differential equation :

$$x \frac{dy}{dx} = x + y$$



25. यदि \vec{a} और \vec{b} कोई दो शून्येतर सदिश हैं, तो दर्शाइए कि सदिश $|\vec{a}| \vec{b} + |\vec{b}| \vec{a}$, सदिश $|\vec{a}| \vec{b} - |\vec{b}| \vec{a}$ के लम्बवत् है।

26. एक थैले में 19 टिकटें, जिन पर 1 से 19 तक की संख्या लिखी हैं, रखी हैं। एक टिकट यादृच्छया निकाली जाती है और बिना इस टिकट को वापस थैले में रखे, एक और टिकट निकाली जाती है। टिकट पर सम संख्या के आने की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक पासा दो बार उछालने पर सफलता की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए, जब “5 से बड़ी संख्या” को एक सफलता के रूप में परिभाषित किया गया है।

खण्ड ग

प्रश्न संख्या 27 से 32 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

27. सिद्ध कीजिए कि $2 \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{31}{17}$.

28. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3.$$

अथवा

सारणिकों का प्रयोग करके, A(1, 3) और B(0, 0) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। k का मान भी ज्ञात कीजिए, यदि एक बिन्दु D(k, 0) इस प्रकार है कि ΔABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

29. सिद्ध कीजिए कि तीन बिन्दु A, B और C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः \vec{a} , \vec{b} और \vec{c} हैं, संरेख हैं, यदि और केवल यदि $(\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) + (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$.



25. Show that $|\vec{a}| |\vec{b}| + |\vec{b}| |\vec{a}|$ is perpendicular to $|\vec{a}| |\vec{b}| - |\vec{b}| |\vec{a}|$, for any two non-zero vectors \vec{a} and \vec{b} .

26. A bag contains 19 tickets, numbered 1 to 19. A ticket is drawn at random and then another ticket is drawn without replacing the first one in the bag. Find the probability distribution of the number of even numbers on the ticket.

OR

Find the probability distribution of the number of successes in two tosses of a die, when a success is defined as “number greater than 5”.

SECTION C

Question numbers 27 to 32 carry 4 marks each.

27. Prove that $2 \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{31}{17}$.

28. Using properties of determinants show that

$$\begin{vmatrix} 1 + a^2 - b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1 - a^2 + b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1 - a^2 - b^2 \end{vmatrix} = (1 + a^2 + b^2)^3.$$

OR

Find the equation of the line joining A(1, 3) and B(0, 0), using determinants. Also, find k if D(k, 0) is a point such that the area of ΔABD is 3 square units.

29. Prove that three points A, B and C with position vectors \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} respectively are collinear if and only if $(\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) + (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$.



30. निम्नलिखित रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। अतः लिखिए कि क्या ये रेखाएँ परस्पर काटती हैं या नहीं।

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z, \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{1}, \quad z=2$$

अथवा

समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j}) + 6 = 0$ व $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = 0$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल-बिन्दु से एक इकाई की दूरी पर है।

31. एक कम्पनी दो प्रकार का सामान, A और B बनाती है, जिसमें सोने व चाँदी का उपयोग होता है। प्रकार A की प्रत्येक इकाई में 3 g चाँदी और 1 g सोना, तथा प्रकार B की प्रत्येक इकाई में 1 g चाँदी और 2 g सोना प्रयोग में आता है। कम्पनी ज़्यादा-से-ज़्यादा 9 g चाँदी और 8 g सोने का ही प्रयोग कर सकती है। यदि प्रकार A की एक इकाई से ₹ 120 का लाभ व प्रकार B की एक इकाई से ₹ 150 का लाभ कमाया जाता है, तो अधिकतम लाभ अर्जित करने हेतु कम्पनी को दोनों प्रकारों की कितनी-कितनी इकाइयाँ बनानी चाहिए ?

उपर्युक्त समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में सूत्रबद्ध करके आलेख विधि से हल कीजिए तथा अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।

32. एक थैले में 5 लाल और 4 काली गेंदें हैं और एक दूसरे थैले में 3 लाल और 6 काली गेंदें हैं। दोनों थैलों में से यादृच्छया एक थैला चुना जाता है और उसमें से यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापना के) दो गेंदें निकाली जाती हैं जो कि दोनों लाल पाई जाती हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि ये दोनों गेंदें दूसरे थैले में से निकाली गई हैं।

खण्ड घ

प्रश्न संख्या 33 से 36 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है।

33. यदि $y = x^{\sin x} + \sin^{-1} \sqrt{x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।



30. Find the shortest distance between the following lines and hence write whether the lines are intersecting or not.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z, \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{1}, \quad z=2$$

OR

Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j}) + 6 = 0$ and $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = 0$, which is at a unit distance from the origin.

31. A company produces two types of goods, A and B, that require gold and silver. Each unit of type A requires 3 g of silver and 1 g of gold, while that of type B requires 1 g of silver and 2 g of gold. The company can use at the most 9 g of silver and 8 g of gold. If each unit of type A brings a profit of ₹ 120 and that of type B ₹ 150, then find the number of units of each type that the company should produce to maximise profit.

Formulate the above LPP and solve it graphically. Also, find the maximum profit.

32. A bag contains 5 red and 4 black balls, a second bag contains 3 red and 6 black balls. One of the two bags is selected at random and two balls are drawn at random (without replacement), both of which are found to be red. Find the probability that these two balls are drawn from the second bag.

SECTION D

Question numbers 33 to 36 carry 6 marks each.

33. If $y = x^{\sin x} + \sin^{-1} \sqrt{x}$, then find $\frac{dy}{dx}$.



34. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$$

35. यदि वक्र $x = y^2$ तथा $x = 4$ के बीच का क्षेत्रफल, रेखा $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में बँटता हो, तो समाकलन के प्रयोग से a का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

36. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा परिभाषित फलन f , निरंतर वर्धमान या निरंतर हासमान है ।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल वाले लंब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है ।



34. Evaluate :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$$

35. If the area between the curves $x = y^2$ and $x = 4$ is divided into two equal parts by the line $x = a$, then find the value of a using integration.

OR

Find :

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

36. Find the intervals in which the function f defined as $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ is strictly increasing or decreasing.

OR

Prove that the radius of the right circular cylinder of greatest curved surface area which can be inscribed in a given cone is half of that of the cone.

**Series HMJ/C****SET-2**कोड नं. **65/C/2**
Code No.रोल नं.
Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--



परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

नोट	NOTE
(I) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 19 हैं ।	(I) Please check that this question paper contains 19 printed pages.
(II) प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।	(II) Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
(III) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 36 प्रश्न हैं ।	(III) Please check that this question paper contains 36 questions.
(IV) कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर-पुस्तिका में प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।	(IV) Please write down the Serial Number of the question in the answer-book before attempting it.
(V) इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।	(V) 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

**MATHEMATICS**

निर्धारित समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 80

Time allowed : 3 hours

Maximum Marks : 80



सामान्य निर्देश :

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख्ती से पालन कीजिए :

- (i) यह प्रश्न-पत्र चार खण्डों में विभाजित किया गया है — क, ख, ग एवं घ । इस प्रश्न-पत्र में 36 प्रश्न हैं । सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) खण्ड क में प्रश्न संख्या 1 से 20 तक 20 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।
- (iii) खण्ड ख में प्रश्न संख्या 21 से 26 तक 6 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है ।
- (iv) खण्ड ग में प्रश्न संख्या 27 से 32 तक 6 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है ।
- (v) खण्ड घ में प्रश्न संख्या 33 से 36 तक 4 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है ।
- (vi) प्रश्न-पत्र में समग्र पर कोई विकल्प नहीं है । तथापि एक-एक अंक वाले तीन प्रश्नों में, दो-दो अंकों वाले दो प्रश्नों में, चार-चार अंकों वाले दो प्रश्नों में और छः-छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं । ऐसे प्रश्नों में से केवल एक ही विकल्प का उत्तर दीजिए ।
- (vii) इसके अतिरिक्त, आवश्यकतानुसार, प्रत्येक खण्ड और प्रश्न के साथ यथोचित निर्देश दिए गए हैं ।
- (viii) कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

खण्ड क

प्रश्न संख्या 1 से 20 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं । सही विकल्प चुनिए ।

1. यदि $\vec{a} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

है, तो λ का मान होगा

- (A) 1
- (B) -1
- (C) 2
- (D) -2

2. अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 + 5x = 0$ की कोटि व घात हैं

- (A) 3; 6
- (B) 3; 3
- (C) 3; 9
- (D) 6; 3

**General Instructions :**

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

- (i) This question paper comprises **four** sections — A, B, C and D. This question paper carries **36** questions. **All** questions are compulsory.
- (ii) **Section A** – Question nos. **1 to 20** comprises of **20** questions of **1** mark each.
- (iii) **Section B** – Question nos. **21 to 26** comprises of **6** questions of **2** marks each.
- (iv) **Section C** – Question nos. **27 to 32** comprises of **6** questions of **4** marks each.
- (v) **Section D** – Question nos. **33 to 36** comprises of **4** questions of **6** marks each.
- (vi) There is no overall choice in the question paper. However, an internal choice has been provided in **3** questions of one mark, **2** questions of two marks, **2** questions of four marks and **2** questions of six marks. Only one of the choices in such questions have to be attempted.
- (vii) In addition to this, separate instructions are given with each section and question, wherever necessary.
- (viii) Use of calculators is **not** permitted.

SECTION A

Question numbers 1 to 20 carry 1 mark each.

Question numbers 1 to 10 are multiple choice questions. Select the correct option.

1. If $\vec{a} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$,

then the value of λ is

- (A) 1
 - (B) -1
 - (C) 2
 - (D) -2
2. The order and the degree of the differential equation
- $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 + 5x = 0$$
- are
- (A) 3; 6
 - (B) 3; 3
 - (C) 3; 9
 - (D) 6; 3



3. यदि $\sec^{-1}\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = a$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है

(A) $\frac{x-1}{y-1}$

(B) $\frac{x-1}{y+1}$

(C) $\frac{y-1}{x+1}$

(D) $\frac{y+1}{x-1}$

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A^2 बराबर होगा

(A) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$



3. If $\sec^{-1}\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = a$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to

(A) $\frac{x-1}{y-1}$

(B) $\frac{x-1}{y+1}$

(C) $\frac{y-1}{x+1}$

(D) $\frac{y+1}{x-1}$

4. If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, then A^2 equals

(A) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$



5. $\begin{vmatrix} 43 & 44 & 45 \\ 44 & 45 & 46 \\ 45 & 46 & 47 \end{vmatrix}$ बराबर है

- (A) 0
(B) -1
(C) 1
(D) 2

6. $\int \frac{e^x}{x+1} [1 + (x+1) \log(x+1)] dx$ बराबर है

- (A) $\frac{e^x}{x+1} + c$
(B) $e^x \frac{x}{x+1} + c$
(C) $e^x \log(x+1) + e^x + c$
(D) $e^x \log(x+1) + c$

7. $\int_0^{\pi/2} (\sin^{100} x - \cos^{100} x) dx$ बराबर है

- (A) $\frac{\pi}{100}$
(B) 0
(C) $\frac{1}{100}$
(D) $\frac{|100|}{(100)^{100}}$



5. $\begin{vmatrix} 43 & 44 & 45 \\ 44 & 45 & 46 \\ 45 & 46 & 47 \end{vmatrix}$ equals

- (A) 0
- (B) -1
- (C) 1
- (D) 2

6. $\int \frac{e^x}{x+1} [1 + (x+1) \log(x+1)] dx$ equals

- (A) $\frac{e^x}{x+1} + c$
- (B) $e^x \frac{x}{x+1} + c$
- (C) $e^x \log(x+1) + e^x + c$
- (D) $e^x \log(x+1) + c$

7. $\int_0^{\pi/2} (\sin^{100} x - \cos^{100} x) dx$ equals

- (A) $\frac{\pi}{100}$
- (B) 0
- (C) $\frac{1}{100}$
- (D) $\frac{|100|}{(100)^{100}}$



8. एक विशेष प्रश्न को A तथा B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{5}$ हैं। यदि दोनों, स्वतंत्र रूप से, प्रश्न हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रश्न के हल हो जाने की प्रायिकता है

(A) $\frac{7}{15}$

(B) $\frac{8}{15}$

(C) $\frac{2}{15}$

(D) $\frac{14}{15}$

9. एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का उद्देश्य फलन होता है

(A) एक अचर

(B) एक रैखिक फलन जिसका इष्टतमीकरण करना है

(C) एक असमिका

(D) एक द्विघाती व्यंजक

10. यदि दो रेखाएँ

$$L_1 : x = 5, \frac{y}{3 - \alpha} = \frac{z}{-2}$$

$$L_2 : x = 2, \frac{y}{-1} = \frac{z}{2 - \alpha}$$

परस्पर लंबवत् हैं, तो α का मान है

(A) $\frac{2}{3}$

(B) 3

(C) 4

(D) $\frac{7}{3}$



8. The probability of solving a specific question independently by A and B are $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{5}$ respectively. If both try to solve the question independently, the probability that the question is solved is

(A) $\frac{7}{15}$

(B) $\frac{8}{15}$

(C) $\frac{2}{15}$

(D) $\frac{14}{15}$

9. The objective function of an LPP is

(A) a constant

(B) a linear function to be optimised

(C) an inequality

(D) a quadratic expression

10. If the two lines

$$L_1 : x = 5, \frac{y}{3 - \alpha} = \frac{z}{-2}$$

$$L_2 : x = 2, \frac{y}{-1} = \frac{z}{2 - \alpha}$$

are perpendicular, then the value of α is

(A) $\frac{2}{3}$

(B) 3

(C) 4

(D) $\frac{7}{3}$



प्रश्न संख्या 11 से 15 तक के प्रश्नों में खाली स्थान भरिए ।

11. अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} - y = \log x$ का समाकलन गुणक है _____ ।
12. एक त्रिभुज के दो कोण $\cot^{-1} 2$ और $\cot^{-1} 3$ हैं । त्रिभुज का तीसरा कोण _____ है ।
13. 52 पत्तों की एक गड्डी से, यादृच्छया 3 पत्ते (बिना प्रतिस्थापना के) निकाले गए । इन पत्तों के दो लाल रंग के पत्ते तथा एक काले रंग का पत्ता होने की प्रायिकता है _____ ।
14. एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि _____ है ।

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$ हो, तो $|AB| =$ _____ .

15. यदि $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ है, तो $t = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा _____ ।

प्रश्न संख्या 16 से 20 अति संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न हैं ।

16. यदि $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ हो, तो $(f \circ f)(x)$ ज्ञात कीजिए ।
17. यदि $\begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि A एक ऐसा वर्ग आव्यूह है कि $A^2 = A$ है, तो $(2+A)^3 - 19A$ ज्ञात कीजिए ।

18. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3} = \frac{2y+4}{7} = \frac{6-z}{2}$ है । इस रेखा का सदिश समीकरण लिखिए ।



Fill in the blanks in question numbers 11 to 15.

11. The integrating factor of the differential equation $x \frac{dy}{dx} - y = \log x$ is _____ .
12. Two angles of a triangle are $\cot^{-1} 2$ and $\cot^{-1} 3$. The third angle of the triangle is _____ .
13. From a pack of 52 cards, 3 cards are drawn at random (without replacement). The probability that they are two red cards and one black card, is _____ .
14. A square matrix A is said to be singular if _____ .

OR

If $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$, then $|AB| =$ _____ .

15. If $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, then the value of $\frac{dy}{dx}$ at $t = \frac{\pi}{4}$ is _____ .

Question numbers 16 to 20 are very short answer type questions.

16. If $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, then find $(f \circ f)(x)$.
17. If $\begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$ is a symmetric matrix, then find the value of x.

OR

If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then find $(2 + A)^3 - 19A$.

18. The Cartesian equation of a line is $\frac{x-5}{3} = \frac{2y+4}{7} = \frac{6-z}{2}$. Write its vector equation.



19. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ हैं, तो अनुपात

$$\frac{\text{सदिश } \vec{a} \text{ का सदिश } \vec{b} \text{ पर प्रक्षेप}}{\text{सदिश } \vec{b} \text{ का सदिश } \vec{a} \text{ पर प्रक्षेप}}$$
 ज्ञात कीजिए।

अथवा

माना \hat{a} तथा \hat{b} दो मात्रक सदिश हैं। यदि सदिश $\vec{c} = \hat{a} + 2\hat{b}$ तथा $\vec{d} = 5\hat{a} - 4\hat{b}$ परस्पर लम्बवत् हों, तो सदिशों \hat{a} तथा \hat{b} के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

20. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = y \tan x$ का विशेष हल ज्ञात कीजिए, जहाँ $y(0) = 1$.

खण्ड ख

प्रश्न संख्या 21 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

21. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

- (i) $(A + A')$ एक सममित आव्यूह है।
(ii) $(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

22. हल कीजिए :

$$x \frac{dy}{dx} = y - x \cos^2 \left(\frac{y}{x} \right)$$

23. यदि \vec{a} और \vec{b} कोई दो शून्येतर सदिश हैं, तो दर्शाइए कि सदिश $|\vec{a}| |\vec{b}| + |\vec{b}| |\vec{a}|$, सदिश $|\vec{a}| |\vec{b}| - |\vec{b}| |\vec{a}|$ के लम्बवत् है।

24. यदि $y = e^x + e^{-x}$ हो, तो दिखाइए कि $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 4}$.



19. If $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$, then find the ratio

$$\frac{\text{projection of vector } \vec{a} \text{ on vector } \vec{b}}{\text{projection of vector } \vec{b} \text{ on vector } \vec{a}}.$$

OR

Let \hat{a} and \hat{b} be two unit vectors. If the vectors $\vec{c} = \hat{a} + 2\hat{b}$ and $\vec{d} = 5\hat{a} - 4\hat{b}$ are perpendicular to each other, then find the angle between the vectors \hat{a} and \hat{b} .

20. Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = y \tan x$, when $y(0) = 1$.

SECTION B

Question numbers 21 to 26 carry 2 marks each.

21. For the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, verify that

- (i) $(A + A')$ is a symmetric matrix.
 (ii) $(A - A')$ is a skew-symmetric matrix.

22. Solve :

$$x \frac{dy}{dx} = y - x \cos^2 \left(\frac{y}{x} \right)$$

23. Show that $|\vec{a}| |\vec{b}| + |\vec{b}| |\vec{a}|$ is perpendicular to $|\vec{a}| |\vec{b}| - |\vec{b}| |\vec{a}|$, for any two non-zero vectors \vec{a} and \vec{b} .

24. If $y = e^x + e^{-x}$, then show that $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 4}$.



25. माना W अंग्रेजी शब्दकोष के शब्दों का समुच्चय है। इस पर एक संबंध R निम्न रूप से परिभाषित है :

$R = \{(x, y) \in W \times W : x \text{ और } y \text{ में कम-से-कम एक अक्षर एक जैसा है}\}$
दर्शाए कि यह सम्बन्ध R स्वतुल्य व सममित है, परन्तु संक्रामक नहीं है।

अथवा

फलन $f(x) = \left(\frac{4x}{3x+4} \right)$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

26. एक थैले में 19 टिकटें, जिन पर 1 से 19 तक की संख्या लिखी हैं, रखी हैं। एक टिकट यादृच्छया निकाली जाती है और बिना इस टिकट को वापस थैले में रखे, एक और टिकट निकाली जाती है। टिकट पर सम संख्या के आने की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक पासा दो बार उछालने पर सफलता की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए, जब “5 से बड़ी संख्या” को एक सफलता के रूप में परिभाषित किया गया है।

खण्ड ग

प्रश्न संख्या 27 से 32 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

27. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$, $x \in [0, 1]$.

28. यदि \hat{a} और \hat{b} ऐसे मात्रक सदिश हैं जिनके बीच का कोण θ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\hat{a} - \hat{b}|.$$

29. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से दर्शाए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3.$$

अथवा



25. Let W denote the set of words in the English dictionary. Define the relation R by

$$R = \{(x, y) \in W \times W \text{ such that } x \text{ and } y \text{ have at least one letter in common}\}.$$

Show that this relation R is reflexive and symmetric, but not transitive.

OR

Find the inverse of the function $f(x) = \left(\frac{4x}{3x+4} \right)$.

26. A bag contains 19 tickets, numbered 1 to 19. A ticket is drawn at random and then another ticket is drawn without replacing the first one in the bag. Find the probability distribution of the number of even numbers on the ticket.

OR

Find the probability distribution of the number of successes in two tosses of a die, when a success is defined as “number greater than 5”.

SECTION C

Question numbers 27 to 32 carry 4 marks each.

27. Prove that $\tan^{-1} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$, $x \in [0, 1]$.

28. If \hat{a} and \hat{b} are unit vectors inclined at an angle θ , then prove that

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\hat{a} - \hat{b}|.$$

29. Using properties of determinants show that

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3.$$

OR



सारणिकों का प्रयोग करके, $A(1, 3)$ और $B(0, 0)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। k का मान भी ज्ञात कीजिए, यदि एक बिन्दु $D(k, 0)$ इस प्रकार है कि ΔABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

30. एक थैले में 5 लाल और 4 काली गेंदें हैं और एक दूसरे थैले में 3 लाल और 6 काली गेंदें हैं। दोनों थैलों में से यादृच्छया एक थैला चुना जाता है और उसमें से यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापना के) दो गेंदें निकाली जाती हैं जो कि दोनों लाल पाई जाती हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि ये दोनों गेंदें दूसरे थैले में से निकाली गई हैं।

31. निम्नलिखित रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। अतः लिखिए कि क्या ये रेखाएँ परस्पर काटती हैं या नहीं।

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z, \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{1}, \quad z=2$$

अथवा

समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j}) + 6 = 0$ व $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = 0$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल-बिन्दु से एक इकाई की दूरी पर है।

32. एक कम्पनी दो प्रकार का सामान, A और B बनाती है, जिसमें सोने व चाँदी का उपयोग होता है। प्रकार A की प्रत्येक इकाई में 3 g चाँदी और 1 g सोना, तथा प्रकार B की प्रत्येक इकाई में 1 g चाँदी और 2 g सोना प्रयोग में आता है। कम्पनी ज़्यादा-से-ज़्यादा 9 g चाँदी और 8 g सोने का ही प्रयोग कर सकती है। यदि प्रकार A की एक इकाई से ₹ 120 का लाभ व प्रकार B की एक इकाई से ₹ 150 का लाभ कमाया जाता है, तो अधिकतम लाभ अर्जित करने हेतु कम्पनी को दोनों प्रकारों की कितनी-कितनी इकाइयाँ बनानी चाहिए ?

उपर्युक्त समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में सूत्रबद्ध करके आलेख विधि से हल कीजिए तथा अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।



Find the equation of the line joining A(1, 3) and B(0, 0), using determinants. Also, find k if D(k, 0) is a point such that the area of ΔABD is 3 square units.

30. A bag contains 5 red and 4 black balls, a second bag contains 3 red and 6 black balls. One of the two bags is selected at random and two balls are drawn at random (without replacement), both of which are found to be red. Find the probability that these two balls are drawn from the second bag.
31. Find the shortest distance between the following lines and hence write whether the lines are intersecting or not.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z, \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{1}, \quad z=2$$

OR

Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j}) + 6 = 0$ and $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = 0$, which is at a unit distance from the origin.

32. A company produces two types of goods, A and B, that require gold and silver. Each unit of type A requires 3 g of silver and 1 g of gold, while that of type B requires 1 g of silver and 2 g of gold. The company can use at the most 9 g of silver and 8 g of gold. If each unit of type A brings a profit of ₹ 120 and that of type B ₹ 150, then find the number of units of each type that the company should produce to maximise profit.
- Formulate the above LPP and solve it graphically. Also, find the maximum profit.



खण्ड घ

प्रश्न संख्या 33 से 36 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है।

33. यदि $y = 3 \cos (\log x) + 4 \sin (\log x)$ है, तो दर्शाइए कि

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

34. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा परिभाषित फलन f , निरंतर वर्धमान या निरंतर हासमान है।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल वाले लंब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है।

35. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$$

36. यदि वक्र $x = y^2$ तथा $x = 4$ के बीच का क्षेत्रफल, रेखा $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में बँटता हो, तो समाकलन के प्रयोग से a का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

**SECTION D**

Question numbers 33 to 36 carry 6 marks each.

33. If $y = 3 \cos (\log x) + 4 \sin (\log x)$, then show that

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

34. Find the intervals in which the function f defined as $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ is strictly increasing or decreasing.

OR

Prove that the radius of the right circular cylinder of greatest curved surface area which can be inscribed in a given cone is half of that of the cone.

35. Evaluate :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$$

36. If the area between the curves $x = y^2$ and $x = 4$ is divided into two equal parts by the line $x = a$, then find the value of a using integration.

OR

Find :

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

**Series HMJ/C****SET-3**कोड नं. **65/C/3**
Code No.रोल नं.
Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--



परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

नोट	NOTE
(I) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 19 हैं ।	(I) Please check that this question paper contains 19 printed pages.
(II) प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।	(II) Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
(III) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 36 प्रश्न हैं ।	(III) Please check that this question paper contains 36 questions.
(IV) कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर-पुस्तिका में प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।	(IV) Please write down the Serial Number of the question in the answer-book before attempting it.
(V) इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।	(V) 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 80

Time allowed : 3 hours

Maximum Marks : 80



सामान्य निर्देश:

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख्ती से पालन कीजिए :

- (i) यह प्रश्न-पत्र चार खण्डों में विभाजित किया गया है — क, ख, ग एवं घ । इस प्रश्न-पत्र में 36 प्रश्न हैं । सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) खण्ड क में प्रश्न संख्या 1 से 20 तक 20 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।
- (iii) खण्ड ख में प्रश्न संख्या 21 से 26 तक 6 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है ।
- (iv) खण्ड ग में प्रश्न संख्या 27 से 32 तक 6 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है ।
- (v) खण्ड घ में प्रश्न संख्या 33 से 36 तक 4 प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है ।
- (vi) प्रश्न-पत्र में समग्र पर कोई विकल्प नहीं है । तथापि एक-एक अंक वाले तीन प्रश्नों में, दो-दो अंकों वाले दो प्रश्नों में, चार-चार अंकों वाले दो प्रश्नों में और छः-छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं । ऐसे प्रश्नों में से केवल एक ही विकल्प का उत्तर दीजिए ।
- (vii) इसके अतिरिक्त, आवश्यकतानुसार, प्रत्येक खण्ड और प्रश्न के साथ यथोचित निर्देश दिए गए हैं ।
- (viii) कैल्कुलेटरो के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

खण्ड क

प्रश्न संख्या 1 से 20 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं । सही विकल्प चुनिए ।

1. यदि \vec{a} , \vec{b} तथा \vec{c} , क्रमशः बिंदुओं A(2, 3, -4), B(3, -4, -5) तथा C(3, 2, -3) के स्थिति सदिश हैं, तो $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ बराबर है

(A) $\sqrt{113}$

(B) $\sqrt{185}$

(C) $\sqrt{203}$

(D) $\sqrt{209}$

**General Instructions :**

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

- (i) This question paper comprises **four** sections — A, B, C and D. This question paper carries **36** questions. **All** questions are compulsory.
- (ii) **Section A** – Question nos. **1** to **20** comprises of **20** questions of **1** mark each.
- (iii) **Section B** – Question nos. **21** to **26** comprises of **6** questions of **2** marks each.
- (iv) **Section C** – Question nos. **27** to **32** comprises of **6** questions of **4** marks each.
- (v) **Section D** – Question nos. **33** to **36** comprises of **4** questions of **6** marks each.
- (vi) There is no overall choice in the question paper. However, an internal choice has been provided in **3** questions of one mark, **2** questions of two marks, **2** questions of four marks and **2** questions of six marks. Only one of the choices in such questions have to be attempted.
- (vii) In addition to this, separate instructions are given with each section and question, wherever necessary.
- (viii) Use of calculators is **not** permitted.

SECTION A

Question numbers 1 to 20 carry 1 mark each.

Question numbers 1 to 10 are multiple choice questions. Select the correct option.

1. If \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} are the position vectors of the points A(2, 3, -4), B(3, -4, -5) and C(3, 2, -3) respectively, then $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ is equal to
 - (A) $\sqrt{113}$
 - (B) $\sqrt{185}$
 - (C) $\sqrt{203}$
 - (D) $\sqrt{209}$



2. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A^2 बराबर होगा

(A) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. समतलों $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ तथा $2x - 2y + z + 6 = 0$ के बीच की दूरी है

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{7}{6}$

(C) $\frac{11}{6}$

(D) $\frac{16}{6}$



2. If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, then A^2 equals

(A) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. The distance between the planes $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ and $2x - 2y + z + 6 = 0$ is

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{7}{6}$

(C) $\frac{11}{6}$

(D) $\frac{16}{6}$



4. एक विशेष प्रश्न को A तथा B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{5}$ हैं। यदि दोनों, स्वतंत्र रूप से, प्रश्न हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रश्न के हल हो जाने की प्रायिकता है
- (A) $\frac{7}{15}$
- (B) $\frac{8}{15}$
- (C) $\frac{2}{15}$
- (D) $\frac{14}{15}$
5. एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का उद्देश्य फलन होता है
- (A) एक अचर
- (B) एक रैखिक फलन जिसका इष्टतमीकरण करना है
- (C) एक असमिका
- (D) एक द्विघाती व्यंजक
6. यदि $\sec^{-1}\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = a$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है
- (A) $\frac{x-1}{y-1}$
- (B) $\frac{x-1}{y+1}$
- (C) $\frac{y-1}{x+1}$
- (D) $\frac{y+1}{x-1}$



4. The probability of solving a specific question independently by A and B are $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{5}$ respectively. If both try to solve the question independently, the probability that the question is solved is

(A) $\frac{7}{15}$

(B) $\frac{8}{15}$

(C) $\frac{2}{15}$

(D) $\frac{14}{15}$

5. The objective function of an LPP is

(A) a constant

(B) a linear function to be optimised

(C) an inequality

(D) a quadratic expression

6. If $\sec^{-1}\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = a$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to

(A) $\frac{x-1}{y-1}$

(B) $\frac{x-1}{y+1}$

(C) $\frac{y-1}{x+1}$

(D) $\frac{y+1}{x-1}$



7. यदि $\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x} dx = \lambda \cos 8x + c$ हो, तो λ का मान होगा

(A) $\frac{1}{16}$

(B) $\frac{1}{8}$

(C) $-\frac{1}{16}$

(D) $-\frac{1}{8}$

8. ऐसे परवलयों के कुल, जिनका शीर्ष मूल-बिंदु पर है और जिनका अक्ष धनात्मक x -अक्ष की दिशा में है, के अवकल समीकरण की कोटि व घात है

(A) 1, 1

(B) 1, 2

(C) 2, 1

(D) 2, 2

9. $\int_0^1 \tan(\sin^{-1} x) dx$ बराबर है

(A) 2

(B) 0

(C) -1

(D) 1

10. समीकरण $\begin{vmatrix} x & 0 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ के मूल हैं

(A) -4, 4

(B) 2, -4

(C) 2, 4

(D) 2, 8



7. If $\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x} dx = \lambda \cos 8x + c$, then the value of λ is

(A) $\frac{1}{16}$

(B) $\frac{1}{8}$

(C) $-\frac{1}{16}$

(D) $-\frac{1}{8}$

8. The order and degree of the differential equation of the family of parabolas having vertex at origin and axis along positive x-axis is

(A) 1, 1

(B) 1, 2

(C) 2, 1

(D) 2, 2

9. $\int_0^1 \tan(\sin^{-1} x) dx$ equals

(A) 2

(B) 0

(C) -1

(D) 1

10. The roots of the equation $\begin{vmatrix} x & 0 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ are

(A) -4, 4

(B) 2, -4

(C) 2, 4

(D) 2, 8



प्रश्न संख्या 11 से 15 तक के प्रश्नों में खाली स्थान भरिए ।

11. एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि _____ है ।

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$ हो, तो $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. एक त्रिभुज के दो कोण $\cot^{-1} 2$ और $\cot^{-1} 3$ हैं । त्रिभुज का तीसरा कोण _____ है ।

13. 52 पत्तों की एक ताश की गड्डी से यादृच्छया एक पत्ता निकाला जाता है । यदि यह पत्ता बेगम हो, तो इसके हुकुम की बेगम होने की प्रायिकता होगी _____ ।

14. अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} - y = \log x$ का समाकलन गुणक है _____ ।

15. यदि $y = \log x$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

प्रश्न संख्या 16 से 20 अति संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न हैं ।

16. यदि $\begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि A एक ऐसा वर्ग आव्यूह है कि $A^2 = A$ है, तो $(2 + A)^3 - 19A$ ज्ञात कीजिए ।

17. अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$ का हल ज्ञात कीजिए ।

18. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ हैं, तो अनुपात

$\frac{\text{सदिश } \vec{a} \text{ का सदिश } \vec{b} \text{ पर प्रक्षेप}}{\text{सदिश } \vec{b} \text{ का सदिश } \vec{a} \text{ पर प्रक्षेप}}$ ज्ञात कीजिए ।

अथवा

माना \hat{a} तथा \hat{b} दो मात्रक सदिश हैं । यदि सदिश $\vec{c} = \hat{a} + 2\hat{b}$ तथा $\vec{d} = 5\hat{a} - 4\hat{b}$ परस्पर लम्बवत् हों, तो सदिशों \hat{a} तथा \hat{b} के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।



Fill in the blanks in question numbers 11 to 15.

11. A square matrix A is said to be singular if _____ .

OR

If $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$, then $|AB| =$ _____ .

12. Two angles of a triangle are $\cot^{-1} 2$ and $\cot^{-1} 3$. The third angle of the triangle is _____ .
13. A card is picked at random from a pack of 52 playing cards. Given that the picked up card is a queen, the probability of it being a queen of spades is _____ .
14. The integrating factor of the differential equation $x \frac{dy}{dx} - y = \log x$ is _____ .
15. If $y = \log x$, then $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____ .

Question numbers 16 to 20 are very short answer type questions.

16. If $\begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$ is a symmetric matrix, then find the value of x.

OR

If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then find $(2 + A)^3 - 19A$.

17. Find the solution of the differential equation $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$.
18. If $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$, then find the ratio

$$\frac{\text{projection of vector } \vec{a} \text{ on vector } \vec{b}}{\text{projection of vector } \vec{b} \text{ on vector } \vec{a}} .$$

OR

Let \hat{a} and \hat{b} be two unit vectors. If the vectors $\vec{c} = \hat{a} + 2\hat{b}$ and $\vec{d} = 5\hat{a} - 4\hat{b}$ are perpendicular to each other, then find the angle between the vectors \hat{a} and \hat{b} .



19. यदि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - x^3)^{1/3}$ द्वारा प्रदत्त है, तो $(fof)(x)$ ज्ञात कीजिए ।
20. x -अक्ष से बिन्दु (a, b, c) की दूरी ज्ञात कीजिए ।

खण्ड ख

प्रश्न संख्या 21 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है ।

21. यदि $y = \sqrt{a + \sqrt{a + x}}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।
22. दिखाइए कि तीन सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$, तथा $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं ।
23. एक थैले में 19 टिकटें, जिन पर 1 से 19 तक की संख्या लिखी हैं, रखी हैं । एक टिकट यादृच्छया निकाली जाती है और बिना इस टिकट को वापस थैले में रखे, एक और टिकट निकाली जाती है । टिकट पर सम संख्या के आने की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए ।

अथवा

एक पासा दो बार उछालने पर सफलता की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए, जब “5 से बड़ी संख्या” को एक सफलता के रूप में परिभाषित किया गया है ।

24. माना W अंग्रेज़ी शब्दकोष के शब्दों का समुच्चय है । इस पर एक संबंध R निम्न रूप से परिभाषित है :

$R = \{(x, y) \in W \times W : x \text{ और } y \text{ में कम-से-कम एक अक्षर एक जैसा है}\}$

दर्शाइए कि यह सम्बन्ध R स्वतुल्य व सममित है, परन्तु संक्रामक नहीं है ।

अथवा

फलन $f(x) = \left(\frac{4x}{3x + 4} \right)$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए ।

25. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ के लिए, निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए :

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I$$



19. If $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be given by $f(x) = (3 - x^3)^{1/3}$, then find $(f \circ f)(x)$.
20. Find the distance of the point (a, b, c) from the x -axis.

SECTION B

Question numbers 21 to 26 carry 2 marks each.

21. If $y = \sqrt{a + \sqrt{a + x}}$, then find $\frac{dy}{dx}$.
22. Show that the three vectors $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$, and $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ form the vertices of a right-angled triangle.
23. A bag contains 19 tickets, numbered 1 to 19. A ticket is drawn at random and then another ticket is drawn without replacing the first one in the bag. Find the probability distribution of the number of even numbers on the ticket.

OR

Find the probability distribution of the number of successes in two tosses of a die, when a success is defined as “number greater than 5”.

24. Let W denote the set of words in the English dictionary. Define the relation R by

$$R = \{(x, y) \in W \times W \text{ such that } x \text{ and } y \text{ have at least one letter in common}\}.$$

Show that this relation R is reflexive and symmetric, but not transitive.

OR

Find the inverse of the function $f(x) = \left(\frac{4x}{3x + 4} \right)$.

25. For the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$, verify the following :

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I$$



26. निम्नलिखित समघात अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x \frac{dy}{dx} = x + y$$

खण्ड ग

प्रश्न संख्या 27 से 32 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है ।

27. x के लिए हल कीजिए :

$$\sin^{-1}(1 - x) - 2 \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

28. एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता फलन $P(x)$ के रूप में निम्नानुसार परिभाषित है, जहाँ k कोई संख्या है :

$$P(x) = \begin{cases} k, & \text{यदि } x = 0 \\ 2k, & \text{यदि } x = 1 \\ 3k, & \text{यदि } x = 2 \\ 0, & \text{अन्यथा.} \end{cases}$$

ज्ञात कीजिए :

(i) k का मान

(ii) $P(X < 2)$, $P(X \leq 2)$, $P(X \geq 2)$

29. एक कम्पनी दो प्रकार का सामान, A और B बनाती है, जिसमें सोने व चाँदी का उपयोग होता है । प्रकार A की प्रत्येक इकाई में 3 g चाँदी और 1 g सोना, तथा प्रकार B की प्रत्येक इकाई में 1 g चाँदी और 2 g सोना प्रयोग में आता है । कम्पनी ज़्यादा-से-ज़्यादा 9 g चाँदी और 8 g सोने का ही प्रयोग कर सकती है । यदि प्रकार A की एक इकाई से ₹ 120 का लाभ व प्रकार B की एक इकाई से ₹ 150 का लाभ कमाया जाता है, तो अधिकतम लाभ अर्जित करने हेतु कम्पनी को दोनों प्रकारों की कितनी-कितनी इकाइयाँ बनानी चाहिए ?

उपर्युक्त समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में सूत्रबद्ध करके आलेख विधि से हल कीजिए तथा अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए ।



26. Solve the following homogeneous differential equation :

$$x \frac{dy}{dx} = x + y$$

SECTION C

Question numbers 27 to 32 carry 4 marks each.

27. Solve for x :

$$\sin^{-1}(1 - x) - 2 \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

28. The random variable X has a probability function P(x) as defined below, where k is some number :

$$P(x) = \begin{cases} k, & \text{if } x = 0 \\ 2k, & \text{if } x = 1 \\ 3k, & \text{if } x = 2 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Find :

- (i) The value of k
- (ii) $P(X < 2)$, $P(X \leq 2)$, $P(X \geq 2)$

29. A company produces two types of goods, A and B, that require gold and silver. Each unit of type A requires 3 g of silver and 1 g of gold, while that of type B requires 1 g of silver and 2 g of gold. The company can use at the most 9 g of silver and 8 g of gold. If each unit of type A brings a profit of ₹ 120 and that of type B ₹ 150, then find the number of units of each type that the company should produce to maximise profit.

Formulate the above LPP and solve it graphically. Also, find the maximum profit.



30. निम्नलिखित रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। अतः लिखिए कि क्या ये रेखाएँ परस्पर काटती हैं या नहीं।

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z, \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{1}, \quad z=2$$

अथवा

समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j}) + 6 = 0$ व $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = 0$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल-बिन्दु से एक इकाई की दूरी पर है।

31. सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक के लंबवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

32. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3.$$

अथवा

सारणिकों का प्रयोग करके, $A(1, 3)$ और $B(0, 0)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। k का मान भी ज्ञात कीजिए, यदि एक बिन्दु $D(k, 0)$ इस प्रकार है कि ΔABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

खण्ड घ

प्रश्न संख्या 33 से 36 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है।

33. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा परिभाषित फलन f , निरंतर वर्धमान या निरंतर हासमान है।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल वाले लंब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है।



30. Find the shortest distance between the following lines and hence write whether the lines are intersecting or not.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z, \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{1}, \quad z=2$$

OR

Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j}) + 6 = 0$ and $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = 0$, which is at a unit distance from the origin.

31. Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$ where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

32. Using properties of determinants show that

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3.$$

OR

Find the equation of the line joining A(1, 3) and B(0, 0), using determinants. Also, find k if D(k, 0) is a point such that the area of ΔABD is 3 square units.

SECTION D

Question numbers 33 to 36 carry 6 marks each.

33. Find the intervals in which the function f defined as $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ is strictly increasing or decreasing.

OR

Prove that the radius of the right circular cylinder of greatest curved surface area which can be inscribed in a given cone is half of that of the cone.



34. योगफलों की सीमा के रूप में $\int_1^3 (x^2 + 1 + e^x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

35. यदि वक्र $x = y^2$ तथा $x = 4$ के बीच का क्षेत्रफल, रेखा $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में बँटता हो, तो समाकलन के प्रयोग से a का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

36. यदि $y = x^{\sin x} + \sin^{-1} \sqrt{x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।



34. Evaluate $\int_1^3 (x^2 + 1 + e^x) dx$ as the limit of sums.

35. If the area between the curves $x = y^2$ and $x = 4$ is divided into two equal parts by the line $x = a$, then find the value of a using integration.

OR

Find :

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

36. If $y = x^{\sin x} + \sin^{-1} \sqrt{x}$, then find $\frac{dy}{dx}$.

**Series HMJ/C****SET-4**कोड नं.
Code No. **65(B)/C**रोल नं.
Roll No. 

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

नोट	NOTE
(I) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 19 हैं ।	(I) Please check that this question paper contains 19 printed pages.
(II) प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।	(II) Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
(III) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 36 प्रश्न हैं ।	(III) Please check that this question paper contains 36 questions.
(IV) कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर-पुस्तिका में प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।	(IV) Please write down the Serial Number of the question in the answer-book before attempting it.
(V) इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।	(V) 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित **(केवल नेत्रहीन परीक्षार्थियों के लिए)****MATHEMATICS****(FOR BLIND CANDIDATES ONLY)**

निर्धारित समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 80

Time allowed : 3 hours

Maximum Marks : 80

65(B)/B

1



सामान्य निर्देश:

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख्ती से पालन कीजिए :

- (i) यह प्रश्न-पत्र चार खण्डों में विभाजित किया गया है — क, ख, ग एवं घ । इस प्रश्न-पत्र में **36** प्रश्न हैं । **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) **खण्ड क** में प्रश्न संख्या **1** से **20** तक **20** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।
- (iii) **खण्ड ख** में प्रश्न संख्या **21** से **26** तक **6** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **2** अंकों का है ।
- (iv) **खण्ड ग** में प्रश्न संख्या **27** से **32** तक **6** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **4** अंकों का है ।
- (v) **खण्ड घ** में प्रश्न संख्या **33** से **36** तक **4** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **6** अंकों का है ।
- (vi) प्रश्न-पत्र में समग्र पर कोई विकल्प नहीं है । तथापि एक-एक अंक वाले **तीन** प्रश्नों में, दो-दो अंकों वाले **दो** प्रश्नों में, चार-चार अंकों वाले **दो** प्रश्नों में और छः-छः अंकों वाले **दो** प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं । ऐसे प्रश्नों में से केवल एक ही विकल्प का उत्तर दीजिए ।
- (vii) इसके अतिरिक्त, आवश्यकतानुसार, प्रत्येक खण्ड और प्रश्न के साथ यथोचित निर्देश दिए गए हैं ।
- (viii) कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है ।

खण्ड क

प्रश्न संख्या 1 से 20 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है । प्रश्न संख्या 1 से 10 तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं । सही विकल्प चुनिए ।

1. यदि $\begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 13 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$ है, तो x का मान है

- (A) 3
- (B) ± 5
- (C) 25
- (D) ± 1



General Instructions :

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

- (i) This question paper comprises **four** sections — A, B, C and D. This question paper carries **36** questions. **All** questions are compulsory.
- (ii) **Section A** – Question numbers **1 to 20** comprises of **20** questions of **1** mark each.
- (iii) **Section B** – Question numbers **21 to 26** comprises of **6** questions of **2** marks each.
- (iv) **Section C** – Question numbers **27 to 32** comprises of **6** questions of **4** marks each.
- (v) **Section D** – Question numbers **33 to 36** comprises of **4** questions of **6** marks each.
- (vi) There is no overall choice in the question paper. However, an internal choice has been provided in **3** questions of one mark, **2** questions of two marks, **2** questions of four marks and **2** questions of six marks. Only one of the choices in such questions have to be attempted.
- (vii) In addition to this, separate instructions are given with each section and question, wherever necessary.
- (viii) Use of calculators is **not** permitted.

SECTION A

Question numbers 1 to 20 carry 1 mark each. Question numbers 1 to 10 are multiple choice type questions. Select the correct option.

1. If $\begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 13 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$, then the value of x is

- (A) 3
- (B) ± 5
- (C) 25
- (D) ± 1



2. $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ के लिए, यदि $A + A' = O$ है, तो α का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{2}$

(D) π

3. $\tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \cot^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ बराबर है

(A) π

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(D) $-\frac{\pi}{2}$

4. यदि $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 3$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12\sqrt{3}$ है, तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान है

(A) 24

(B) 144

(C) 2

(D) 12



2. For $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, if $A + A' = O$, then the value of α is

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{2}$

(D) π

3. $\tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \cot^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ is equal to

(A) π

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(D) $-\frac{\pi}{2}$

4. If $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 3$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12\sqrt{3}$, then the value of $|\vec{a} \times \vec{b}|$ is

(A) 24

(B) 144

(C) 2

(D) 12



5. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sqrt{\cot x}} dx$ बराबर है

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

6. यदि एक रेखा x -अक्ष तथा y -अक्ष से क्रमशः $\frac{\pi}{6}$ तथा $\frac{\pi}{3}$ के कोण बनाती है, तो यह रेखा z -अक्ष से जो कोण बनाती है, वह है

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) 0

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

7. रेखा $\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j}) + \lambda(\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k})$ की समतल

$\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) = 5$ से दूरी है

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

(D) $\frac{-2}{3\sqrt{2}}$



5. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sqrt{\cot x}} dx$ is equal to

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

6. If a line makes angle $\frac{\pi}{6}$ and $\frac{\pi}{3}$ with x-axis and y-axis respectively, then the angle made by the line with z-axis is

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) 0

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

7. The distance of the line $\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j}) + \lambda(\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k})$ from the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) = 5$ is

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

(D) $\frac{-2}{3\sqrt{2}}$



8. किसी रैखिक प्रोग्रामन समस्या के सुसंगत क्षेत्र की सीमा के बिंदुओं (3, 4) तथा (5, 0) पर उद्देश्य फलन $z = ax + by$, जहाँ $a, b > 0$ का अधिकतम मान समान आता है, तो

- (A) $a = 2b$
 (B) $2a = b$
 (C) $2a = 3b$
 (D) $3b = 2a$

9. ताश की अच्छी प्रकार से फेंटी गई गड्डी में से एक-एक करके, प्रतिस्थापना सहित, दो पत्ते निकाले गए। पहले पत्ते के बादशाह होने तथा दूसरे पत्ते के बेगम होने की प्रायिकता है

- (A) $\frac{1}{13} + \frac{1}{13}$
 (B) $\frac{1}{13} \times \frac{4}{51}$
 (C) $\frac{4}{52} \times \frac{3}{51}$
 (D) $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13}$

10. यदि X एक यादृच्छिक चर है जिसका प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है :

X	0	1	2
P(X)	k	4k	k

तो k का मान तथा बंटन का माध्य, क्रमशः हैं

- (A) $\frac{1}{7}, 1$
 (B) $\frac{1}{6}, 2$
 (C) $\frac{1}{6}, 1$
 (D) $1, \frac{1}{6}$



8. If the corner points (3, 4) and (5, 0) of the feasible region in an LPP, give the same maximum value for the objective function $z = ax + by$, where $a, b > 0$, then we have

- (A) $a = 2b$
- (B) $2a = b$
- (C) $2a = 3b$
- (D) $3b = 2a$

9. Two cards are drawn from a well-shuffled pack of playing cards one-by-one with replacement. The probability that the first card is a king and the second card is a queen is

- (A) $\frac{1}{13} + \frac{1}{13}$
- (B) $\frac{1}{13} \times \frac{4}{51}$
- (C) $\frac{4}{52} \times \frac{3}{51}$
- (D) $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13}$

10. If X is a random variable with probability distribution as given below :

X	0	1	2
P(X)	k	4k	k

The value of k and the mean of the distribution respectively are

- (A) $\frac{1}{7}, 1$
- (B) $\frac{1}{6}, 2$
- (C) $\frac{1}{6}, 1$
- (D) $1, \frac{1}{6}$



प्रश्न संख्या 11 से 15 तक के प्रश्नों में खाली स्थान भरिए । प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

11. माना एक संबंध R, समुच्चय N में इस प्रकार परिभाषित है कि
 $R = \{(x, y) : 2x + 3y = 15, x, y \in N\}$, तो $R = \{\text{_____}, \text{_____}\}$.

12. यदि $A = \begin{bmatrix} 4x & 0 \\ 2x & 2x \end{bmatrix}$ तथा $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो $x = \text{_____}$ ।

13. यदि फलन $f(x) = \begin{cases} k \cos x, & \text{यदि } x \neq \frac{\pi}{2} \\ \pi - 2x, & \text{यदि } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $x = \frac{\pi}{2}$ पर संतत है, तो k का मान है _____ ।

14. वक्र $y = 2x^2 + 3 \sin x$ के $x = 0$ पर खींचे गए अभिलंब की प्रवणता है _____ ।

अथवा

एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय (₹ में)

$R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है । $x = 12$ पर सीमांत आय है _____ ।

15. सदिश $-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ की दिशा में 9 इकाई परिमाण का एक सदिश है _____ ।

प्रश्न संख्या 16 से 20 अति संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न हैं । प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

16. यदि $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -7 & x & 2 \\ 9 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

17. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{(x+2)(x+2 \log x)^3}{x} dx$$



Fill in the blanks in question numbers 11 to 15. Each question is of 1 mark.

11. Let R be the relation defined in N, as

$$R = \{(x, y) : 2x + 3y = 15, x, y \in \mathbb{N}\}, \text{ then } R = \{ \underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}} \}.$$

12. If $A = \begin{bmatrix} 4x & 0 \\ 2x & 2x \end{bmatrix}$ and $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, then $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. If the function $f(x) = \begin{cases} \frac{k \cos x}{\pi - 2x}, & \text{if } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 2, & \text{if } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ is continuous at

$$x = \frac{\pi}{2}, \text{ then the value of } k \text{ is } \underline{\hspace{2cm}}.$$

14. The slope of the normal to the curve $y = 2x^2 + 3 \sin x$ at $x = 0$ is $\underline{\hspace{2cm}}$.

OR

The total revenue (in ₹) received from sale of x units of a product is $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$. The marginal revenue, when $x = 12$ is $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. A vector of magnitude 9 units in the direction of the vector $-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ is $\underline{\hspace{2cm}}$.

Question numbers 16 to 20 are very short answer type questions. Each question is of 1 mark.

16. Find the value of x , if $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -7 & x & 2 \\ 9 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

17. Find :

$$\int \frac{(x+2)(x+2 \log x)^3}{x} dx$$



18. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \log (\tan x) dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-1}^2 |x| dx$$

19. ज्ञात कीजिए :

$$\int x^2 \log x \cdot dx$$

20. निम्नलिखित अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$$

अथवा

निम्नलिखित अवकल समीकरण के लिए समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x \quad (x \neq 0)$$

खण्ड ख

प्रश्न संख्या 21 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

21. दर्शाइए कि सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय \mathbb{R} में

$R = \{(a, b) : a \leq b\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R न तो स्वतुल्य है और न ही सममित है ।

अथवा

$\tan^{-1} [2 \cos (2 \sin^{-1} (\frac{1}{2}))]$ का मान ज्ञात कीजिए ।



18. Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \log (\tan x) dx$$

OR

Evaluate :

$$\int_{-1}^2 |x| dx$$

19. Find :

$$\int x^2 \log x \cdot dx$$

20. Find the general solution of the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x) (1 + y)$$

OR

Find the integrating factor for the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x \quad (x \neq 0)$$

SECTION B

Question numbers 21 to 26 carry 2 marks each.

21. Show that the relation R in the set \mathbb{R} of all real numbers, defined as $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$ is neither reflexive nor symmetric.

OR

Find the value of $\tan^{-1} [2 \cos (2 \sin^{-1} (\frac{1}{2}))]$.



22. यदि $\sin y = x \sin (a + y)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 (a + y)}{\sin a}$.
23. वक्र $y = x^2 + 4x + 1$ के बिंदु (3, 22) पर स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए ।
24. यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ एक समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं, तो इस समांतर चतुर्भुज के विकर्ण के समांतर मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ है, तो $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ज्ञात कीजिए ।

25. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{2-y}{-2\lambda} = \frac{z-3}{2}$ तथा $\frac{x-1}{3\lambda} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-7}$ परस्पर लंबवत् हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए ।
26. दो घटनाओं A तथा B के लिए, यदि $P(A) = \frac{4}{10}$, $P(B) = \frac{8}{10}$ तथा $P(B | A) = \frac{6}{10}$ है, तो $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए ।

खण्ड ग

प्रश्न संख्या 27 से 32 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

27. माना एक फलन $f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$ द्वारा परिभाषित है । दर्शाइए कि f एक एकैकी फलन है । अतः फलन $f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \rightarrow$ परिसर f का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए ।



22. If $\sin y = x \sin (a + y)$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 (a + y)}{\sin a}$.
23. Find the equation of tangent to the curve $y = x^2 + 4x + 1$ at the point (3, 22).
24. If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ represent two adjacent sides of a parallelogram, then find the unit vector parallel to the diagonal of the parallelogram.

OR

If $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, then find $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

25. Find the value of λ so that the lines $\frac{x-1}{-3} = \frac{2-y}{-2\lambda} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{x-1}{3\lambda} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-7}$ are perpendicular to each other.
26. For two events A and B if $P(A) = \frac{4}{10}$, $P(B) = \frac{8}{10}$ and $P(B | A) = \frac{6}{10}$, then find $P(A \cup B)$.

SECTION C

Question numbers 27 to 32 carry 4 marks each.

27. Let a function $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined as $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$. Show that f is one-one function. Hence, find the inverse of the function $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \text{Range of } f$.



28. यदि $y = \tan^{-1} \left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \right)$, $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $y = (\tan^{-1} x)^2$ है, तो दर्शाइए कि $(x^2 + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 2$.

29. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

30. निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x \cos \left(\frac{y}{x} \right) \frac{dy}{dx} = y \cos \left(\frac{y}{x} \right) + x$$

31. एक आहार-विज्ञानी दो प्रकार के भोज्यों को इस प्रकार मिलाना चाहता है कि मिश्रण में विटामिन A का घटक कम-से-कम 8 मात्रक और विटामिन C का घटक कम-से-कम 10 मात्रक हो । भोज्य I में 2 मात्रक विटामिन A प्रति kg और 1 मात्रक विटामिन C प्रति kg है, जबकि भोज्य II में 1 मात्रक विटामिन A प्रति kg और 2 मात्रक विटामिन C प्रति kg है । दिया गया है कि प्रति kg भोज्य I को खरीदने में ₹ 50 और प्रति kg भोज्य II को खरीदने में ₹ 70 लगते हैं । मिश्रण की इस लागत को कम करने के लिए इस समस्या को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए ।

32. थैले I में 4 लाल और 3 काली गेंदें हैं और थैले II में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं । दोनों थैलों में से यादृच्छया एक को चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है, जो कि लाल पाई जाती है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि गेंद थैले II से निकाली गई है ।

अथवा

ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोत्तर बिना प्रतिस्थापना के निकाले जाते हैं । इक्कों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए । अतः बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए ।



28. If $y = \tan^{-1} \left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \right)$, $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, then find $\frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$.

OR

If $y = (\tan^{-1} x)^2$, then show that $(x^2 + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 2$.

29. Find :

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

30. Solve the following differential equation :

$$x \cos \left(\frac{y}{x} \right) \frac{dy}{dx} = y \cos \left(\frac{y}{x} \right) + x$$

31. A dietician wishes to mix two types of foods in such a way that vitamin contents of the mixture contain at least 8 units of vitamin A and 10 units of vitamin C. Food I contains 2 units/kg of vitamin A and 1 unit/kg of vitamin C. Food II contains 1 unit/kg of vitamin A and 2 units/kg of vitamin C. It costs ₹ 50 per kg to purchase Food I and ₹ 70 per kg to purchase Food II. Formulate this problem as a Linear Programming Problem for minimising the cost of such a mixture.

32. Bag I contains 4 red and 3 black balls. Bag II contains 3 red and 5 black balls. One of the two bags is selected at random and a ball is drawn from the bag, which is found to be red. Find the probability that the ball is drawn from Bag II.

OR

Two cards are drawn successively without replacement from a well-shuffled pack of 52 cards. Find the probability distribution of the number of aces and hence find its mean.



खण्ड घ

प्रश्न संख्या 33 से 36 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

33. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए, दर्शाइए कि

$$A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = 0. \text{ अतः } A^{-1} \text{ ज्ञात कीजिए ।}$$

अथवा

सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से निम्नलिखित को x के लिए हल कीजिए :

$$\begin{vmatrix} x+3 & x+7 & x-1 \\ x+7 & x-1 & x+3 \\ x-1 & x+3 & x+7 \end{vmatrix} = 0$$

34. दर्शाइए कि एक दिए गए अचर वृत्त के अंतर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चतम होता है ।

अथवा

अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f , निरंतर वर्धमान या निरंतर हासमान है ।

35. समाकलन के प्रयोग से उस त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(2, 0)$, $(4, 5)$ तथा $(1, 4)$ हैं ।

36. रेखा $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-4}{4}$ को अंतर्विष्ट करने वाले उस समतल का कार्तीय तथा सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु $(3, 2, 0)$ से होकर जाता है ।



SECTION D

Question numbers 33 to 36 carry 6 marks each.

33. For the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$,

show that $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = 0$. Hence, find A^{-1} .

OR

Using the properties of determinants, solve the following for x :

$$\begin{vmatrix} x+3 & x+7 & x-1 \\ x+7 & x-1 & x+3 \\ x-1 & x+3 & x+7 \end{vmatrix} = 0$$

34. Show that of all the rectangles inscribed in a given fixed circle, the square has maximum area.

OR

Find the intervals in which the function f given by

$f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ is strictly increasing or strictly decreasing.

35. Using integration, find the area of triangular region whose vertices are $(2, 0)$, $(4, 5)$ and $(1, 4)$.

36. Find the cartesian and the vector equation of a plane which passes through the point $(3, 2, 0)$ and contains the line $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-4}{4}$.