Regional Mathematical Olympiad-2017

Time: 3 hours **October 08, 2017**

Instructions:

- **Calculators (in any form) and protractors are not allowed.**
- **Rulers and compasses are allowed.**
- **Answer all the questions.**
- **All questions carry equal marks. Maximum marks: 102.**
- **Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.**

1. Let AOB be a given angle less than $180°$ and let P be an interior point of the angular region determined by $\angle AOB$. Show, with proof, how to construct, using only ruler and compasses, a line segment CD passing through P such that C lies on the ray OA and D lies on the ray OB, and $CP : PD = 1 : 2$.

2. Show that the equation

   $$a^3+(a+1)^3+(a+2)^3+(a+3)^3+(a+4)^3+(a+5)^3+(a+6)^3 = b^4+(b+1)^4$$

   has no solutions in integers a, b.

3. Let $P(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + b$ and $Q(x) = x^2 + cx + d$ be two polynomials with real coefficients such that $P(x)Q(x) = Q\big(P(x)\big)$ for all real x. Find all the real roots of $P\big(Q(x)\big) = 0$.

4. Consider n^2 unit squares in the xy-plane centred at point (i, j) with integer coordinates, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$. It is required to colour each unit square in such a way that when ever $1 \le i < j \le n$ and $1 \le k < l \le n$, the three squares with centres at $(i, k), (j, k), (j, l)$ have distinct colours. What is the least possible number of colours needed?

5. Let Ω be a circle with a chord AB which is not a diameter. LetΓ_1 be a circle on one side of AB such that it is tangent to AB at C and internally tangent to Ωat D. Likewise, letΓ_2 be a circle on the other side of AB such that it is tangent to AB at E and internally tangent to Ωat F. Suppose the line DC intersects Ωat $X \ne D$ and the line FE intersects Ωat $Y \ne F$. Prove that XY is a diameter of Ω.

6. Let x, y, z be real numbers, each greater than 1. Prove that

   $$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1} \le \frac{x-1}{y-1}+\frac{y-1}{z-1}+\frac{z-1}{x-1}.$$

———-0———-

आर. एम. ओ. 2017

समय: 3 घंटे 08 अक्टूबर, 2017

निर्देश:

- **कैलकुलेटर (किसी भी स्वरुप में) या चांदा लाने की अनुमति नहीं है।**
- **रुलर एवं प्रकार लाने की अनुमति है।**
- **सभी प्रश्नों के जवाब दें।**
- **सभी प्रश्न बराबर अंकों के हैं। अधिकतम अंक:** 102
- **हर प्रश्न का हल नए पन्ने से शुरु करें। प्रश्न संख्या का साफ़-साफ़ उल्लेख करें।**

1. मान लीजिए कि AOB एक कोण दिया हुआ है जो $180°$ से कम है और P, $\angle AOB$ द्वारा निर्धारित कोणीय क्षेत्र में, एक भीतरी बिंदु है। प्रमाण के साथ दिखाइए कि, केवल रुलर एवं प्रकार का प्रयोग करते हुए, P से गुज़रते हुए एक ऐसे रेखाखंड CD की रचना कैसे करेंगे ताकि C अर्ध-रेखा OA पर स्थित हो, D अर्ध-रेखा OB पर स्थित हो, और $CP : PD = 1 : 2$ हो।

2. दिखाइए की समीकरण

$$a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + (a+3)^3 + (a+4)^3 + (a+5)^3 + (a+6)^3 = b^4 + (b+1)^4$$

   का पूर्णांकों a, b में कोई हल नहीं है।

3. मान लीजिए कि $P(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + b$ एवं $Q(x) = x^2 + cx + d$ दो बहुपद हैं जिनके गुणाँक वास्तविक हैं और सभी वास्तविक x के लिए $P(x)Q(x) = Q(P(x))$। इस स्तिथि में समीकरण $P(Q(x)) = 0$ के सभी वास्तविक हल ज्ञात कीजिए।

4. मान लीजिए कि कार्तीय तल में n^2 इकाई-वर्ग (प्रत्येक का क्षेत्रफल 1 है) दिए गए हैं जिनके केंद्र (i, j) हैं, जहाँ $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$। प्रत्येक वर्ग को इस प्रकार से रंग से भरना है कि जब भी $1 \le i < j \le n$ व $1 \le k < l \le n$ हो, तो उन तीनों वर्गों के रंग भिन्न हों जिनके केंद्र $(i, k), (j, k), (j, l)$ हैं। ऐसी स्तिथि में न्यूनतम आवश्यक रंगों की संख्या ज्ञात कीजिए।

5. मान लीजिए की Ω एक वृत्त है और AB एक जीवा है जो कि व्यास नहीं है। मान लीजिए कि Γ_1 रेखा AB की एक तरफ़ एक वृत्त है जो रेखा AB को C पर स्पर्श करता है और वृत्त Ω को D पर भीतर से स्पर्श करता है। उसी तरह मान लीजिए कि Γ_2 रेखा AB की दूसरी तरफ़ एक वृत्त है जो रेखा AB को E पर स्पर्श करता है और वृत्त Ω को F पर भीतर से स्पर्श करता है। माना लीजिए कि रेखा DC वृत्त Ω से $X \neq D$ पर मिलती है और रेखा FE वृत्त Ω से $Y \neq F$ पर मिलती है। प्रमाणित करिए कि XY वृत्त Ω का व्यास है।

6. मान लीजिए कि प्रत्येक वास्तविक संख्या x, y, z संख्या 1 से बड़ी है। प्रमाणित करिए कि:

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \le \frac{x-1}{y-1} + \frac{y-1}{z-1} + \frac{z-1}{x-1}$$